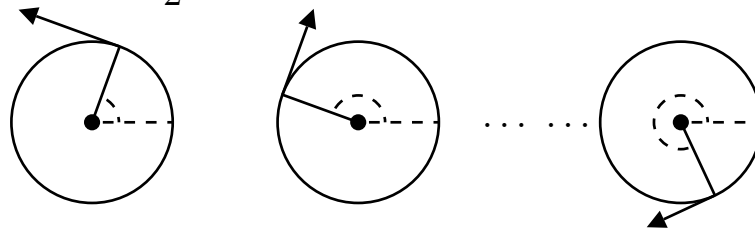


Résonances elliptiques et sommées de séries divergentes

Guido Gentile, G. Gallavotti
Università di Roma 3 and Roma 1

Hamiltonien : $H = \frac{1}{2} \mathbf{I}^2 + \varepsilon f(\boldsymbol{\varphi})$ avec $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{T}^\ell$



1

Representation de l'espace des phases en termes de ℓ rotateurs.

Résonance : Le premiers r angles $\boldsymbol{\alpha}$ tournent et le restants s angles $\boldsymbol{\beta}$ ne bougent pas ($r + s = \ell$).

Soit $\varepsilon = 0$ et $\mathbf{I} = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$, $\boldsymbol{\varphi} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\omega} t, \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0$$

Si $\boldsymbol{\omega}$ sont indépendantes sur les rationnels, *e.g.* si existent $C_0, \tau > 0$

$$|\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}| \geq \frac{1}{C_0 |\boldsymbol{\nu}|^\tau} \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^r, \boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$$

Question: Si $\varepsilon \neq 0$ existent-ils des mouvements quasi périodiques qui continuent le mouvement non perturbés?

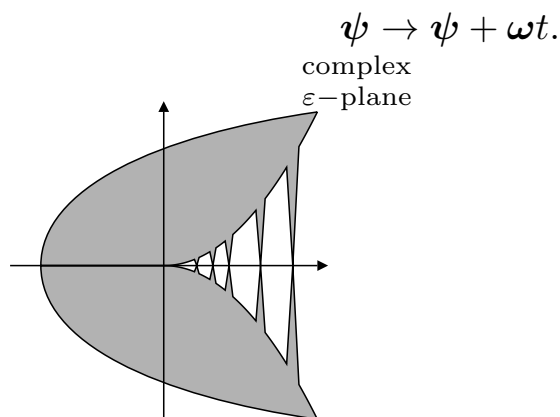
Par exemple si $r = 1$ y a-t-il des orbites périodiques? (Oui! en général *mais pas beaucoup*). De même pour les tores.

On considère le tores avec fréquences $(\omega, \mathbf{0})$ et on veut prouver que en général

Théorème: Si $\beta_0 \in \mathbb{T}^s$ rend stationnaire la moyenne (sur α) $\bar{f}(\beta)$ de $f(\varphi) \equiv f(\alpha, \beta)$ et si la matrice $s \times s$ des ses dérivées $\partial_{\beta}^2 \bar{f}(\beta)$ n'est pas dégénérée et à valeurs propres positives différentes, alors il y a un tore invariant d'équations paramétriques

$$\alpha = \psi + \mathbf{a}(\psi), \quad \beta = \beta_0 + \mathbf{b}(\psi)$$

si ε est assez petit et dehors d'un ensemble \mathcal{E}^c de densité nulle à l'origine. Le mouvement y est "libre": c'est à dire



2

En plus le fonctions \mathbf{a}, \mathbf{b} sont analytiques en ψ et différentiables d'ordre arbitraire en ε et **analytiques aussi en ε pour $\varepsilon < 0$ si la matrice $\partial_{\beta}^2 \bar{f}(\beta_0)$ est positive.**

Existence de une solution formelle en série de puissances en ε :
série de Lindstedt.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{h} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \mathbf{h}^{(k)}$$

Pas de convergence en general: **mais**

Idée: “il n’y a pas des séries non convergentes”

Donc on chèreche des **régles de somme**

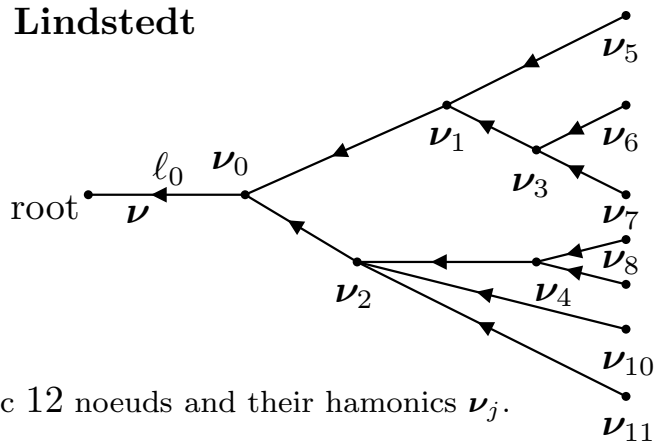
Découper $\mathbf{h}^{(k)}$ en somme de beaucoup de termes et le récombinaer pour obtenir une série absolument convergente.

Dans le proces on sera forcé de sommer de séries divergentes en donnant **une prescription**. Exemple typique

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad z \neq 1$$

même si $|z| > 1$!.

La série de Lindstedt



F

Un arbre θ avec 12 noeuds and their hamonics ν_j .

Donné un graph θ on en définit la **valeur**

$$\text{Val}(\theta) = \frac{\varepsilon^k}{k!} \left(\prod_{v \in V(\theta)} F_v \right) \left(\prod_{\ell \in \Lambda(\theta)} G_\ell \right),$$

Les valeurs sont des simples produits de facteurs associés aux noeuds et aux lignes.

$$F_v = \partial_{\varphi_{\gamma_0} \dots \varphi_{\gamma_p}}^{p+1} f_\nu(\beta_0) = \begin{array}{c} \nearrow \gamma_1 \\ \nearrow \gamma_2 \\ \bullet \gamma_0 \\ \searrow \gamma_p \end{array}$$

$$G_{\gamma\gamma'} = \delta_{\gamma\gamma'} \frac{1}{(\omega \cdot \nu)^2} = \begin{array}{c} \bullet \gamma \longleftarrow \gamma' \bullet \end{array} \quad \nu \neq \mathbf{0}$$

$$G_{\gamma\gamma'} = \left(\frac{1}{\varepsilon \partial_{\beta\beta}^2 f_0(\beta_0)} \right)_{\gamma, \gamma'} = \begin{array}{c} \bullet \gamma \longleftarrow [\infty] \gamma' \bullet \end{array} \quad \nu = \mathbf{0} \quad \text{and } \gamma, \gamma' > r$$

$G_{\gamma\gamma'} = 0$ if $\nu = \mathbf{0}$ and γ or $\gamma' \leq r$
 ou ∂_{φ_j} est bien la dérivée rapport à φ_j si $j > r$ (c'est à dire si $\varphi_j = \beta_{j-r}$) mais si $j \leq r$ (c'est à dire si $\varphi_j = \alpha + j$) alors on doit interpréter $\partial_j f_\nu(\beta_0)$ comme multiplication par $i\nu_j$: donc

$$\partial_j f_\nu(\beta_0) \stackrel{def}{=} i\nu_j f_\nu(\beta_0)$$

Donné un graphe θ avec k lignes (et **sans** noeuds avec une seule ligne entrante avec $\mathbf{0}$ courant et harmonique $\mathbf{0}$) on en définit la **valeur**

$$\text{Val}(\theta) = \frac{\varepsilon^k}{k!} \left(\prod_{\mathbf{v} \in V(\theta)} F_{\mathbf{v}} \right) \left(\prod_{\ell \in \Lambda(\theta)} G_{\ell} \right),$$

Les valeurs sont des simples produits de facteurs associés aux noeuds et aux lignes.

$$F_{\mathbf{v}} = \prod_j \partial_{\gamma_j} f_{\nu_{\mathbf{v}}}(\beta_0),$$

$$G_{\ell} \equiv \delta_{\gamma_{\ell}, \gamma'_{\ell}} \frac{1}{(\omega \cdot \nu_{\ell})^2}, \quad \text{if } \nu_{\ell} \neq \mathbf{0},$$

$$G_{\ell} \equiv -\varepsilon^{-1} (\partial_{\beta}^2 f_{\mathbf{0}}(\beta_0))_{\gamma_{\ell}, \gamma'_{\ell}}^{-1}, \quad \text{if } \nu_{\ell} = \mathbf{0}, \text{ et } \gamma_{\ell}, \gamma'_{\ell} > r$$

$$G_{\ell} \equiv 0, \quad \text{if } \nu_{\ell} = \mathbf{0}, \text{ et } \gamma_{\ell} \text{ ou } \gamma'_{\ell} \leq r$$

donc division par 0 interdite: (*Poincaré*). La valeur de θ est un monome de degré q et si $\Theta_{q, \nu, \gamma}^{\circ}$ est l'ensemble des graphes θ à degré q on trouve la

Série de Lindstedt

$$\varepsilon^q h_{\nu, \gamma}^{(q)} = \sum_{\theta \in \Theta_{q, \nu, \gamma}^{\circ}} \text{Val}(\theta)$$

Première resommation

On élimine les “noeuds triviaux”

$$\begin{array}{c} \nu \qquad \qquad \nu \\ \longleftarrow \quad \bullet \quad \longleftarrow \quad \nu \neq 0 \\ \qquad \qquad \qquad 0 \end{array} \quad 3$$

(facteur de noeud $M_0 \stackrel{def}{=} \varepsilon \partial_{\beta\beta}^2 f_0(\beta_0)$) car le chaînes de k tels noeuds

$$\begin{array}{c} \nu \neq 0 \\ \longleftarrow \quad \bullet \quad \longleftarrow \quad \bullet \quad \longleftarrow \quad \bullet \quad \longleftarrow \\ \qquad \qquad \qquad 0 \qquad \qquad \qquad 0 \qquad \qquad \qquad 0 \end{array} \quad 4$$

engendrent des facteurs $\frac{1}{(\omega \cdot \nu)^2} \left(\frac{M_0}{(\omega \cdot \nu)^2} \right)$ dans la valeur de l'arbre et

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\omega \cdot \nu)^2} \left(\frac{M_0}{(\omega \cdot \nu)^2} \right)^k \equiv \frac{1}{x^2} \sum_k z^k \stackrel{def}{=} \frac{1}{x^2(1-z)}$$

ou $x \stackrel{def}{=} \omega \cdot \nu$ dont la somme vaut (pourvu que $\det(x^2 - M_0) \neq 0$)

$$\bar{g}() = \frac{1}{x^2 - M_0}$$

Donc **pas de noeud triviaux** MAIS propagateur $(x^2 - M_0)^{-1}$!

Cas hyperbolique: $\beta_0 =$ point de maximum pour $\bar{f}(\beta)$ et $x^2 - M_0 \neq 0$ toujours

Cas elliptique: $\beta_0 =$ point de minimum ou de stationnarité pour $\bar{f}(\beta)$ et $x^2 - M_0$ peut s'annuler

$$\frac{1}{x^2 - M_0}$$

Donc **pas de noeud triviaux** MAIS propagateur $\bar{g}(x) \stackrel{def}{=} (x^2 - M_0)^{-1}$.

La nouvelle séries plus simple mais pas tous ses termes son bien definis! (dans le cas elliptique ou mixte)

car le diviseurs peuvent s'annuler, cas qui correspond à $z = 1$ ou $\det(x^2 - M_0) = 0$: si a_1, \dots, a_s sont le valeurs propres de M_0 et $x^2 = \varepsilon a_i$.

On écarte alors des ε :

$$\min_j \left| |x| - \sqrt{\underline{\lambda}_j^{[0]}(\varepsilon)} \right| \geq 2^{-(\bar{n}_0-1)/2} \frac{C_0}{|\nu|^{\tau_1}}$$

ici n_0 est une mesure de ε : $C_0^2 2^{-n_0-1} < \varepsilon a_s \leq C_0^2 2^{-n_0}$. On prendra \bar{n}_0 un peu plus grand.

On régarde la série comme un somme de quantités singulières: le singularités étant données par les zéros de $x^2 - M_0$.

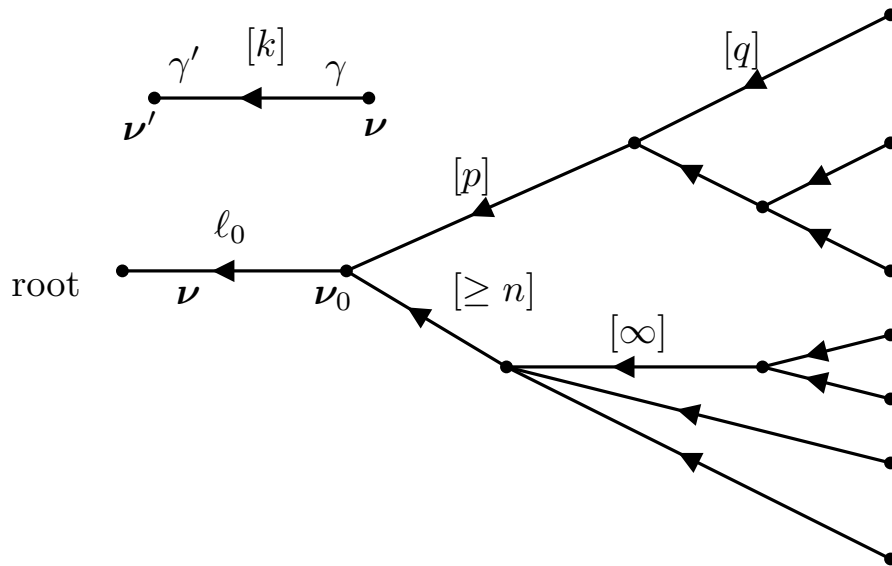
Alors on imagine de découper les propagateurs $\bar{g} = (x^2 - M_0)^{-1}$ comme sommes de quantités régulières mais de plus en plus grandes.

$$\bar{g}(x, \varepsilon) = g^{[0]} + g^{[1]} + \dots + g^{[n-1]} + g^{[\geq n]}$$

n étant un entier. Le découpage se fait en définissant, **a peu pres**, $g^{[k]}$ comme égale à 0 ou à \bar{g} si

$$2^{-2k}C_0 < x^2 \leq C_02^{-2k}$$

Donc les propagateurs $g^{[k]}$ non seulement ne sont plus singuliers mais ils ont une taille qui ne change pas entre *max* et *min*.
à l'exception de $g^{[\geq n]}$.



5

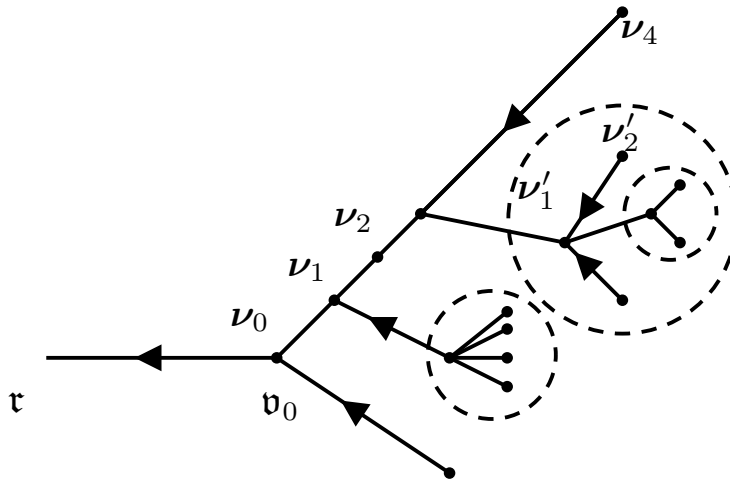
Un arbre avec quelques échelles des propagateurs marquées.

A peu près?: en effet il y a ambiguïté à définir $g^{[k]}$. On pourrait le définir exactement comme on vien de dire sans “a peu pres”: on obtiendrait une représentation des valeurs qui formélement donne le même résultat pour \mathbf{h} pourvu qu’on considère que les lignes ont un index d’échelle $[0], [1], \dots, [n-1], [\geq n]$ et ensuite on évalue avec le propagateurs correspondents.

On réserve l’index $[\infty]$ aux ligne à $x = 0$ (*i.e.* $\nu = \mathbf{0}$).

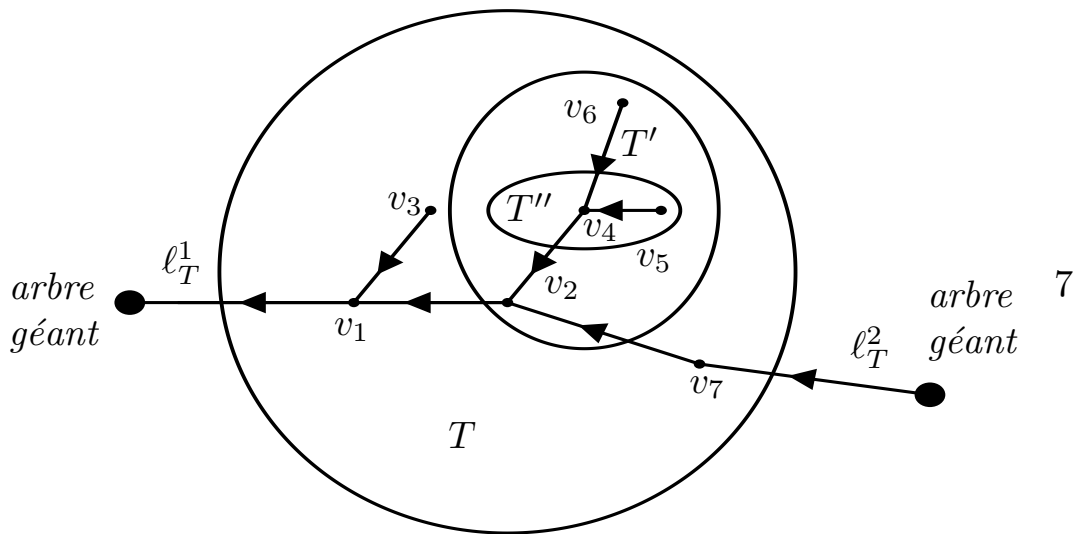
Mais pas utile. On déterminera $g^{[k]}$ de façon à **simplifier** les graphes: telle que si on considère seulement les contributions ou n'apparaissent que les échelles $[0], \dots, [n - 1]$ ou $[\infty]$ alors la somme de telles contributions est convergente.

On modifiera (**peu**) les propagateurs tout en éliminant les **clusters de self-énergie**.



6

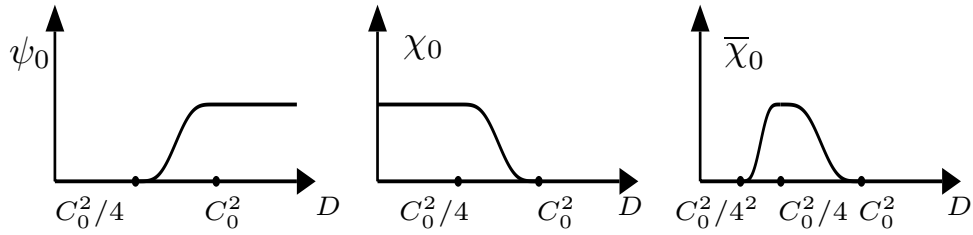
Illustrations des clusters



7

Illustrations de clusters et de clusters de self-énergie.
 “Responsables des problèmes de petit diviseurs”

Analyse multiéchelle des singularités



8

Fonctions de “cut-off”: $\psi_n(D) = \psi_0(2^{2n}D)$, $\chi_n(D) = \chi_0(2^{2n}D)$

$$\chi_n(D) + \psi_n(D) \equiv 1$$

On définit **distance à la singularité**

$$D(x) = \min_{\varepsilon \in I} \min_j \left| x^2 - \underline{\lambda}_j^{[0]}(\varepsilon) \right|$$

(pour “une taille donnée” de ε : $\varepsilon \in I \stackrel{def}{=} (2^{-2(n_0+1)}C_0^2, 2^{-2n}C_0^2]$)

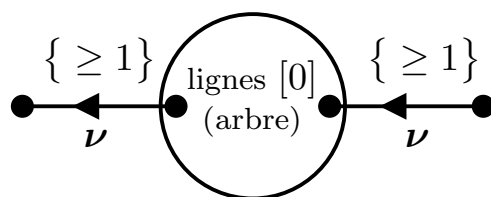
Alors on écrit $\bar{g}(x) \equiv g^{\geq 0](x)}$ et

$$g^{[\geq 0]}(x; \varepsilon) = \psi_0(D(x)) g^{[\geq 0]}(x; \varepsilon) + \chi_0(D(x)) g^{[\geq 0]}(x; \varepsilon) =$$

$$\stackrel{def}{=} g^{[0]}(x; \varepsilon) + g^{\{\geq 1\}}(x; \varepsilon)$$

et on peut représenter les termes de la série en ajoutant un index d'échelle $[0]$ ou $\{\geq 1\}$ sur toute ligne.

Soit un cluster de self-énergie “d’échelle [0]”

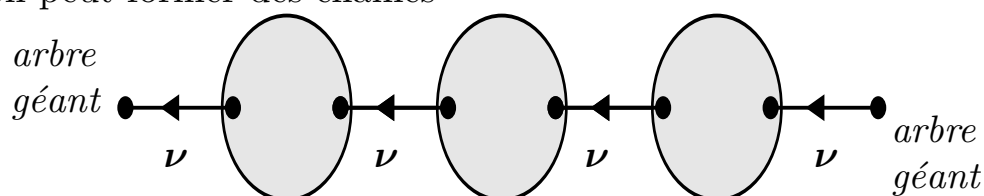


9

$\text{Val}(\theta) = \text{facteurs extérieurs}$.

$$\cdot g^{\{\geq 1\}} \cdot \left(\sum \text{valeurs internes possibles} \right) g^{\{\geq 1\}}$$

et on peut former des chaînes



10

dont les valeurs, puisque $g^{\{\geq 1\}} = \frac{\chi_0(x)}{x^2 - M_0}$, se somment à

$$\begin{aligned} & g^{\{\geq 1\}} \cdot \left(\left(\sum \text{self énergies possibles} \right) g^{\{\geq 1\}} \right)^k \\ &= g^{\{\geq 1\}} \cdot \frac{1}{1 - \sum (s.e.) g^{\{\geq 1\}}} \\ &= \frac{\chi_0(x)}{x^2 - M_0 - \sum (s.e.) \chi_0} \stackrel{\text{def}}{=} g^{[\geq 1]} \end{aligned}$$

Self-énergies éliminées au prix d’arbres avec échelles $[\infty]$, $[0]$, et $[\geq 1]$.

Encore singuliers car le propagateur

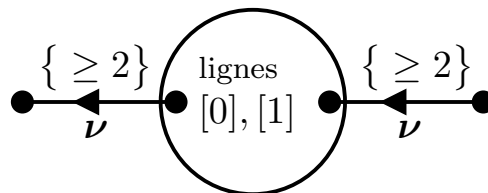
$$g^{[\geq 1]} \stackrel{def}{=} \frac{\chi_0(x)}{x^2 - \mathcal{M}^{\leq 1}}$$

avec $\mathcal{M}^{[\leq 1]} \equiv \chi_0 M_0 + \sum(s.e.)$ peut devenir à dénominateur proche de zéro.

Maintenant on itère

$$g^{[\geq 1]} \equiv g^{[\geq 1]} \psi_1(D(x)) + g^{[\geq 1]} \chi_1(D(x)) \stackrel{def}{=} g^{[1]} + g^{\{\geq 2\}}$$

A nouveau on produit des graphes avec lignes à échelles $[\infty], [0], [1], \{\geq 2\}$. **Il peut y avoir des self-énergies**



11

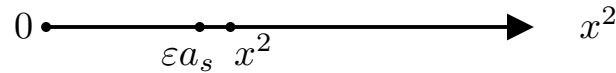
et on procède comme avant.

On obtient ainsi des arbres dont les lignes portent échelles $[\infty], [0], [1], \dots, [n-1], [\geq n]$ **sans self énergies**

mais singuliers sur les lignes $[\geq n]$.

Idée: itérer pour **éliminer** les lignes singulières avec index $[\geq n]$.

Si $\varepsilon a_s \sim C_0^2 2^{-2n_0}$ (définition de n_0) des qu'on considère $g^{[n]}$



avec $n \sim n_0$ on ne pourra plus borner $x^2 - M_0^{[\leq n]}$ avec x^2

Difficulté: des qu'on arrive à échelle n_0 on ne pourra plus borner inférieurement les diviseurs par une constante fois x^2 car la distance aux singularités peut devenir bien plus petite que x^2 .

En plus les singularités bougent! peu mais de $O(\varepsilon^2)$ et donc si on est trop près on risque que le cut-off qui mesure la distance aux singularités initiales (**résonances avec les valeurs propres de M_0**) ne soit plus bon à éviter des singularités même dans les propagateurs $g^{[n]}$ si $n \gg n_0$.

Problème seulement dans le cas elliptique!

Alors change stratégie: on mesure la distance aux singularités par

$$\Delta^{[n]}(x; \varepsilon) \stackrel{def}{=} \min \left| x^2 - \underline{\lambda}_j^{[n]}(\varepsilon) \right|,$$

avec le point de référence qui s'adapte à l'échelle $\underline{\lambda}_j^{[n]}$: défini par

$$\underline{\lambda}_j^{[n]}(\varepsilon) \stackrel{def}{=} \lambda_j^{[n]} \left(\sqrt{\underline{\lambda}_j^{[n-1]}(\varepsilon)}, \varepsilon \right), \quad \underline{\lambda}_j^{[\bar{n}_0-1]}(\varepsilon) \stackrel{def}{=} \lambda_j^{[0]},$$

Car on prouve que les variations des $\mathcal{M}^{[\leq n]}$ sont **minimes** et décroissent plus rapidement que toute puissance en ε .

À petites échelles $\Delta^{[n]}(x; \varepsilon)$ reste mesure de la force de la singularité.

La somme des diagrammes sans self-énergies converge: argument classique (Eliasson) si on peut borner inférieur. les diviseurs par x^2 .

Maintenant cela n'est pas vrai: x^2 peut être proche non pas de zéro mais d'une valeur propre de $\mathcal{M}^{[\leq n]}$.

En effet pour les premières r valeurs propres on peut garder la méthode de Siegel, Bryuno, Pöschel car on peut prouver que, **grâce à des compensations dont l'existence était déjà connue dans le cas du théorème KAM** et grace à des identités algébriques qui garantissent que $\mathcal{M}^{[\leq n]}(x)$ est Hermitiennes on a $\underline{\lambda}_j(\varepsilon) \equiv 0$ si $j \leq r$ et $\lambda_j(x, \varepsilon) = O(\varepsilon x^2)$ au lieu du naïf $O(\varepsilon^2)$.

Si $j > r$ pas de *compensation*: **mais** on montre que les valeurs des graphes sont tellement petites qu'on n'en a pas nécessité, **pourvu** qu'on écarte un certain nombre de ε 's qui ne vérifient pas à une condition Diophantienne sur ω , c'est à dire ne vérifient pas

$$\min \left\{ \left| x \pm \sqrt{\underline{\lambda}_j^{[m]}(\varepsilon)} \right|, \left| x \pm \sqrt{\underline{\lambda}_j^{[m]}(\varepsilon)} \pm \sqrt{\underline{\lambda}_i^{[m]}(\varepsilon)} \right| \right\} \geq 2^{-\frac{1}{2}m} \frac{C_0}{|\nu|^{\tau_1}},$$

→ restrictions ultérieures sur ε (une infinité) ω étant fixé. L'importance de telle propriété Dioph. fut élucidée par Melnikov.

Donc la clef est que si $x = \omega \cdot \nu$ est grand par rapport à εa_s , on ne voit pas la différence entre $\varepsilon < 0$ et $\varepsilon > 0$ car on borne le diviseurs par une constante fois x^2 , comme dans le cas KAM.

Pour les autres échelles on peut procéder comme dans les cas KAM si x^2 est proche de zéro. Et si x^2 est proche de ε alors on remarque que les valeurs des arbres sont tellement petites que on n'a pas besoin de exhiber des compensations.