

Séries Divergentes dans l'équation de Hamilton-Jacobi

G. Gentile, G.G.

Hamiltonien $\mathcal{H}^\varepsilon(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 + \varepsilon f(\boldsymbol{\alpha}), \quad (\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{T}^\ell$

HJ : $\frac{1}{2}(\partial_{\boldsymbol{\alpha}} S(\mathbf{A}', \boldsymbol{\alpha}))^2 + \varepsilon f(\boldsymbol{\alpha}) = E(\mathbf{A}')$

Eq. Mouvement: $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{A} \\ \dot{\mathbf{A}} = -\varepsilon \partial_{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{\alpha}) \end{cases}$

2 Cergy

Hamiltonien: $\mathcal{H}^\varepsilon(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 + \varepsilon f(\boldsymbol{\alpha})$ sur

$$\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{T}^\ell \equiv \mathbb{R}^\ell \times [0, 2\pi]^\ell : \quad \mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\ell), \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$$

équation HJ pour $S(\mathbf{A}', \boldsymbol{\alpha}) \stackrel{def}{=} \mathbf{A}' \cdot \boldsymbol{\alpha} + \Phi(\mathbf{A}', \boldsymbol{\alpha})$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{A}' + \partial_{\boldsymbol{\alpha}}\Phi(\mathbf{A}', \boldsymbol{\alpha}))^2 + \varepsilon f(\boldsymbol{\alpha}) = E(\mathbf{A}')$$

$$f(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^\ell} f_{\boldsymbol{\nu}} e^{i\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\alpha}}, \quad f_{\boldsymbol{\nu}} \equiv 0 \text{ if } |\boldsymbol{\nu}| > N$$

Φ périodique en $\boldsymbol{\alpha}$ et petite avec $\varepsilon \rightarrow 0$ dans $V \times \mathbb{T}^\ell$
 $E(\mathbf{A}')$ analytique dans V avec V ouvert dans \mathbb{R}^ℓ

Application:

$$\text{Soit: } \begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{A}' + \partial_{\alpha} \Phi(\mathbf{A}', \alpha) \\ \psi = \alpha + \partial_{\mathbf{A}'} \Phi(\mathbf{A}', \alpha) \end{cases} \text{ et } \omega(\mathbf{A}') \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\mathbf{A}'} E(\mathbf{A}')$$

$\Rightarrow \psi(t) = \psi + \omega(\mathbf{A}')t$ résout les équations du mouvement
si OK l'inversion $\alpha = \psi + \mathbf{h}(\psi)$ *i.e.*

$$\alpha(t) = \psi(t) + \mathbf{h}(\psi(t)) \longleftrightarrow \ddot{\alpha} = -\varepsilon \partial_{\alpha} f(\alpha)$$

Ne fonctionne pas car HJ n'est soluble "que" si $\exists C, \tau > 0$
t.q.

$$|\omega(\mathbf{A}') \cdot \nu| > C |\nu|^{-\tau} \text{ et } \varepsilon \text{ est petit}$$

$$\ddot{\alpha} = -\varepsilon \partial_{\alpha} f(\alpha), \text{ et } \alpha = \psi + \mathbf{h}(\psi), \text{ et } \dot{\psi}(t) \equiv \omega$$

$$(\omega \cdot \partial_{\psi})^2 \mathbf{h}(\psi) = -\varepsilon \partial_{\alpha} f(\psi + \mathbf{h}(\psi))$$

4 Cergy

Donc: donné ω (C, τ) -Diophantien trouver $\mathbf{h}(\psi)$

$$(\omega \cdot \partial_\psi)^2 \mathbf{h}(\psi) = -\varepsilon \partial_\alpha f(\psi + \mathbf{h}(\psi))$$

Rappel classique (Kepler) [$h(\psi) = -\varepsilon \partial_\psi f(\psi + h(\psi))$]

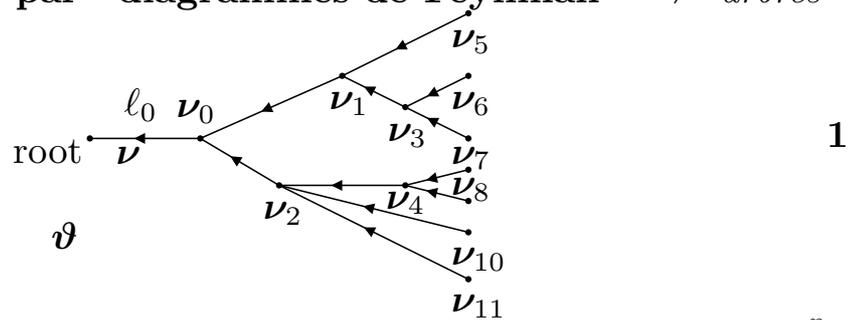
Séries de puissances par Laplace, Lagrange, Levi-Civita

“même algorithm” s’applique à HJ:

$$\mathbf{h}_\nu^{(k)} \cdot \mathbf{u} = \sum_{\text{tree graphs } \theta}^* \text{Val}(\theta)$$

(Lindstedt, Newcomb, Poincaré)

Répresentation par “diagrammes de Feynman” \Rightarrow arbres

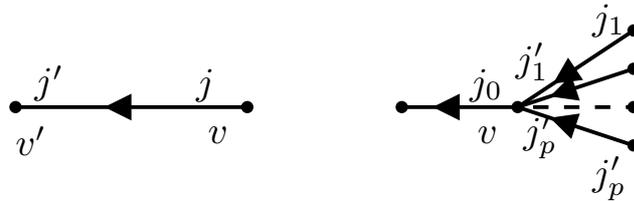


- (1) au noeud v on attache une harmonique de Fourier $\nu \in \mathbb{Z}^r$
 (2) à la branche $\lambda \equiv v'v$ on attache un courant $\nu(\lambda) = \sum_{w \leq v} \nu_w$

$$(3) \text{Val}(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k!} \left(\prod_v \varepsilon f_{\nu_v} \right) \left(\prod_{\substack{\text{branches} \\ \lambda=v'v}} \frac{\nu_{v'} \cdot \nu_v}{(\omega \cdot \nu(\lambda))^2} \right)$$

$\mathbf{h}_\nu \cdot \mathbf{u} \equiv \sum_\theta^* \text{Val}(\theta) : * \rightarrow$ pas de branches avec courant 0

Convient une autre représentation pour généraliser ensuite:



(4) étiquettes de branche $j'_\lambda, j_\lambda = 1, \dots, \ell$ et tenseurs de noeud

$$v \rightarrow J^v = (j_0, \dots, j_p) \text{ et } \partial_{J^v} f_{\nu_v} \equiv \prod_i (\partial_{j_i} f_{\nu}) \equiv (\prod_i \nu_{j_i}) f_{\nu}$$

$$(3') \text{ Valeur : } \text{Val}(\theta) = \frac{1}{k!} \left(\prod_v \varepsilon \partial_{J^v} f_{\nu_v} \right) \left(\prod_{\text{lines } \lambda} g_{j'_\lambda j_\lambda} \right)$$

$$g_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta_{ij}}{(\omega \cdot \nu(\lambda))^2} = \text{matrice propagateur de branche}$$

$$\text{Borne: } |h_{\nu}^{(k)}| \leq bB^k \varepsilon^k k!^{2\tau} \rightarrow !!$$

Kolmogorov: iteration $\Rightarrow |h_{\nu}^{(k)}| \leq bB^k \varepsilon^k$

Arnold: iteration & extension; Moser: différentiable

Eliasson: analyse des compensations

Cas résonnant: $\omega = (\omega_0, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$, $l = r + s$,
 $\omega_0 = (C, \tau)$ -Dioph.. **Non perturbé:**

$$\alpha \stackrel{def}{=} (\gamma, \beta) \in \mathbb{T}^r \times \mathbb{T}^s, \quad t \rightarrow (\gamma + \omega_0 t, \beta)$$

Existent ils $\mathbf{h}(\psi) = (\mathbf{g}(\psi), \mathbf{k}(\psi))$, β_0 , $\psi \in \mathbb{T}^r$, $\beta_0 \in \mathbb{T}^s$ tel que

$$\gamma = \psi + \mathbf{g}(\psi), \quad \beta = \beta_0 + \mathbf{k}(\psi)$$

- (1) résoud l'eq. du mouvement si $\psi(t) = \psi + \omega_0 t$ et
 (2) \mathbf{g}, \mathbf{k} sont petit avec $\varepsilon \rightarrow 0$?

Equivalemment $\ddot{\alpha} = -\varepsilon \partial_{\alpha} f(\alpha)$ or $(\omega_0 \cdot \partial_{\psi})^2 \mathbf{h}(\psi) =$

$$(\omega_0 \cdot \partial_{\psi})^2 \begin{pmatrix} \mathbf{g}(\psi) \\ \mathbf{k}(\psi) \end{pmatrix} = -\varepsilon \partial_{\alpha} f(\psi + \mathbf{g}(\psi), \mathbf{k}(\psi))$$

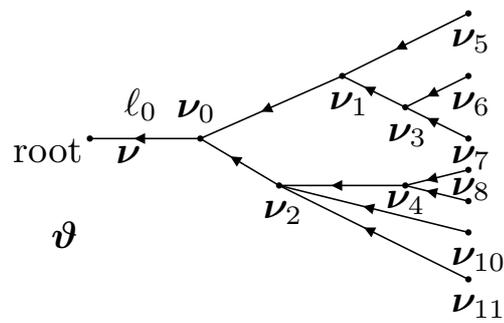
8 Cergy

Résonance \Rightarrow diminution de la dimensionalité de ℓ à r .

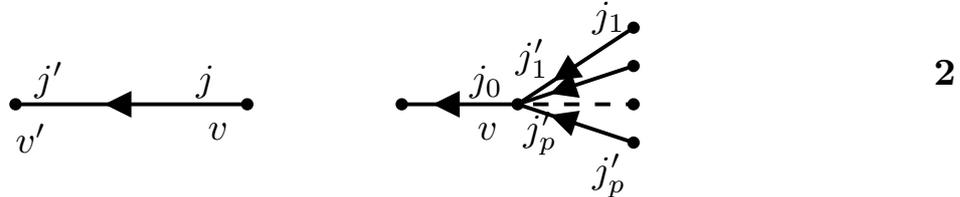
Nécessaire: β_0 doit être tel que $\partial_\beta \int_{\mathbb{T}^r} d\gamma f(\gamma, \beta_0) = 0$

$\neq 0$ contredit $\dot{\beta} = -\varepsilon \partial_\beta f(\gamma, \beta)$ à l'ordre plus bas !

Proposition: \exists solution en séries de puissances (élémentaire)



- (1) On attache au noeud v une harmonique $\nu \in \mathbb{Z}^r$
- (2) À la branche $\lambda \equiv v'v$ on attache un courant $\nu(\lambda) = \sum_{w \leq v} \nu_w$
- (3) et deux étiquettes de composante j'_λ, j_λ



$v \rightarrow J^v = (j_0, \dots, j_p)$ et $\partial_{J^v} f_{\nu_v}(\beta_0)$ sont défini.

(4) Valeur : $\text{Val}(\theta) = \frac{1}{k!} \left(\prod_v \varepsilon \partial_{J^v} f_{\nu_v}(\beta_0) \right) \left(\prod_{\text{branches } \lambda} g_{j_\lambda j'_\lambda} \right)$

$g_{ij} \stackrel{def}{=} \frac{\delta_{ij}}{(\omega \cdot \nu(\lambda))^2}$, or $g_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\varepsilon \partial_{\beta\beta}^2 f(\beta_0))^{-1} \end{pmatrix}$ if $\nu(\lambda) = \mathbf{0}$

$\mathbf{h}_\nu \equiv \sum_\theta^* \text{Val}(\theta)$:

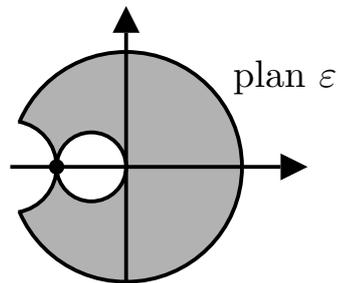
* \rightarrow pas de noeuds triviaux avec harmonique 0

Borne: $|h_\nu^{(k)}| \leq bB^k \varepsilon^k k!^{2\tau} \rightarrow$!! Résultats:

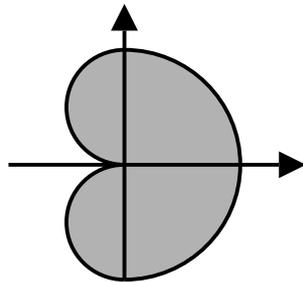
10 Cergy

Théorème: La série des valeurs d'arbres peut être réordonnée pour donner une représentation en série convergente de h , donc son existence, dans les domaine

$\varepsilon \in \mathcal{E}$; \mathcal{E} dense à 0
elliptique: $\varepsilon < 0$,



3



$\varepsilon > 0$, cas hyperbolique

$(\partial_{\beta\beta}^2 \bar{f}(\beta_0) < 0)$

région d'analyticité

commune à tous $\varepsilon > 0$

MAIS borne $k!^{3\tau}$

4

Il faudrait $k!^2$ pour sommabilité de Borel (mais $3\tau \geq 3$).

Question: *y a t-il unicité ? Les autres résultats sont-ils les mêmes ?* (Delshams, Llave, Zhou $\ell = 3, r = 2$, Treshev $\varepsilon > 0$ seulement)

En insérant un noeud avec 0 harmonique ($\Rightarrow \nu \neq 0$) on obtient

$$\begin{array}{c}
 \bullet \xleftarrow{\nu} \bullet \xleftarrow{\nu} \bullet \\
 i \qquad i_0 \quad j_0 \qquad j
 \end{array}
 \quad \text{Soit } M_{0;i_0j_0} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \partial^2 f(\beta_0) \end{pmatrix} \quad \mathbf{5}$$

$$\frac{\delta_{ij}}{(\omega \cdot \nu)^2} \rightarrow \frac{\delta_{ij_0}}{(\omega \cdot \nu)^2} \left(M_{0;i_0j_0} \frac{\delta_{j_0j}}{(\omega \cdot \nu)^2} \right) \Rightarrow \text{modification de propaga-}$$

teur

Des chaines peuvent se former

$$\begin{array}{c}
 \bullet \xleftarrow{\nu} \bullet \xleftarrow{\nu} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \xleftarrow{\nu} \bullet \\
 i \qquad i_0 \quad j_0 \quad i_1 \quad j_1 \qquad \qquad \qquad j
 \end{array}
 \quad \mathbf{6}$$

$$\frac{\delta_{ij}}{(\omega \cdot \nu)^2} \rightarrow \frac{1}{(\omega \cdot \nu)^2} \left(M_0 \frac{1}{(\omega \cdot \nu)^2} \right)^k. \quad \text{On "simplifie": PAS de noeuds}$$

triviaux;

prix :

$$\frac{1}{(\omega \cdot \nu)^2} \Rightarrow \frac{1}{(\omega \cdot \nu)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(M_0 \frac{1}{(\omega \cdot \nu)^2} \right)^k \equiv \frac{1}{(\omega \cdot \nu)^2 - M_0}$$

MAIS $z = M_0 \frac{1}{(\omega \cdot \nu)^2} < 1$? NO

12 Cergy

Donc disant $\sum_k z^k = (1 - z)^{-1}$ on utilise des prescriptions comme

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = -1$$

Si on accepte $\frac{1}{(\omega \cdot \nu)^2} \Rightarrow \frac{1}{(\omega \cdot \nu)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(M_0 \frac{1}{(\omega \cdot \nu)^2} \right)^k \equiv \frac{1}{(\omega \cdot \nu)^2 - M_0}$

$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \partial_{\beta}^2 \bar{f}(\beta_0) \end{pmatrix}$ montre si $\partial_{\beta}^2 \bar{f}(\beta_0) < 0$ que $\varepsilon > 0$ “plus

facile” que $\varepsilon < 0$: valeurs propres $\mu_j < 0$.

Pour $\varepsilon < 0$ on s'attend de devoir exclure ε s.t $|\omega \cdot \nu| = \pm \sqrt{-\varepsilon \mu_j}$

Cléf: Théorème de Siegel

Donné θ soit \mathcal{N}_n le numero de branches d'échelle n : i.e. $2^{-n} < C|\omega \cdot \nu| \leq 2^{-n+1}$, $n = 0, 1, \dots$. SI il n'y a pas de branches $\lambda' < \lambda$ avec $\nu(\lambda') = \nu(\lambda)$ avec que des échelles intermediaires plus petites, ALORS

$$\mathcal{N}_n \leq 4N2^{-n/\tau} k$$

Trivial bound ($\varepsilon > 0$):

$$\prod_v |\partial^{J^v} f_{\nu_v} f(\beta_0)| \leq \prod N^{|J^v|} F^k \leq N^{2k}$$

$$\prod_\lambda |\text{propagateurs}| \leq C^{2k} \left(\prod_{n=0}^{\infty} 2^{2n(4N2^{-n/\tau})} \right)^k$$

$$\text{numero d'harmoniques} \leq (2N + 1)^k$$

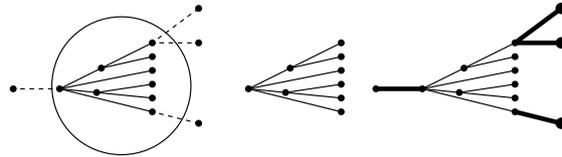
$$\text{numero d'arbres} \leq 4^k k! \quad \text{Convergence:}$$

$$|\varepsilon| < \left(N^2 (2N + 1)^\ell F 32^{-8N} \sum_n n 2^{-n/\tau} \right)^{-1}$$

PROBLÈME: il y a BEACOUPI d'autres chaines.

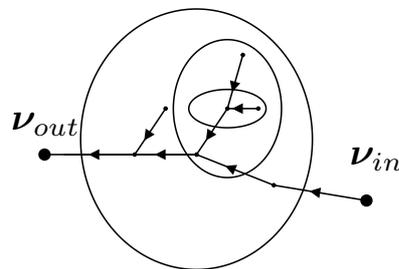
Analyse multiéchelle: Organize les branches de θ dans des clusters

Definition: Un cluster d'échelle n est un ensemble maximale connecté de branches de θ à échelle $p \leq n$ et avec au moins une branche d'échelle n .



7

Clusters de "auto energie" $\nu_{in} = \nu_{out}$

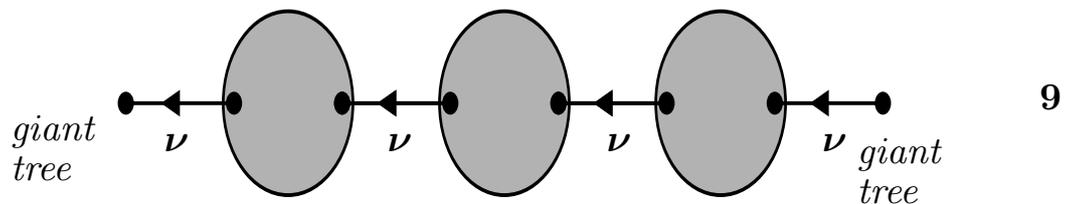


8

On élimine les clusters a.e. par résommations

Analyse multi échelle est nécessaire pour éviter “divergences en superposition” (erreurs combinatoires). D’abord identification des clusters résonnants d’échelle [0]

i.e. avec $x \stackrel{def}{=} C\omega \cdot \nu$ et $1 \leq x^2$; puis on résomme toutes chaînes

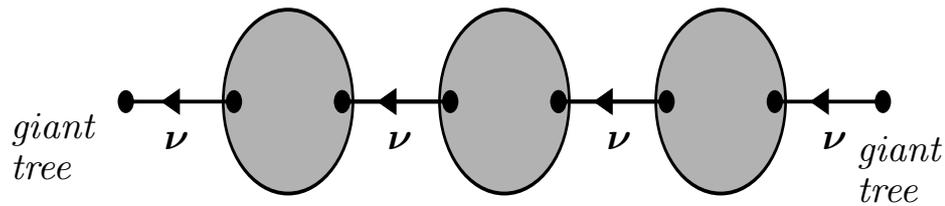


Remarque cléf: *aucun cluster d’a.e contient clusters d’a.e.*

Les sommes sur les graphes contenus dans un cluster de a.e.

⇒ convergent grace au lemme de Siegel.

La somme sur les clusters d’a.e. d’échelle [0] porte à modifier les propageateurs des branches à échelle $[\geq 1]$



$$g^{[\geq 1]}(x) = \frac{1}{x^2 - M_0} \rightarrow \frac{1}{x^2 - M_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(M_1 \frac{1}{x^2 - M_0} \right)^n$$

qui devient

$$\frac{1}{x^2 - M_0 - M_1}$$

Les diagrammes se simplifient devenant sans sous-graphes de a.e. d'échelle [0].

Itération! à chaque pas seulement graphes sans aucun sous-graph d'a.e. apparaissent; \Rightarrow **on additionne au propagateurs des contributions convergentes**

Dans le cas hyperbolique aucun problème réel surgit, **mais le cas elliptique est très différent.**

Comme l'échelle décroît on arrive tôt ou tard à $2^{-n} \simeq \varepsilon$ ou $x^2 - M_0 - M_1 - \dots - M_{n-1}$ peut s'annuler.

(a) Des nouvelles valeurs de ε sont exclues

(b) les échelles successives doivent être mesurées tenant compte de la taille de $x^2 - M_0 - M_1 - \dots$; l'analyse devient délicate:

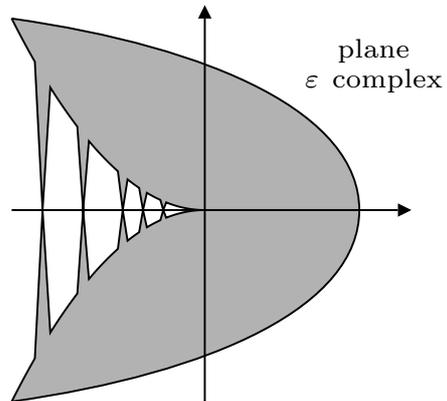
DIFFICULTÉ: même dans les cas hyperbolique il faut contrôler que les propagateurs renormalisés aient la même taille que le propagateurs nus

Le lemme de Siegel s'applique seulement aux diagrammes dans lesquels la taille des propagateurs de courant ν est de l'ordre de $x^2 \equiv (\omega \cdot \nu)^{-2}$.

Ce n'est pas automatique mais il suit du mécanisme de compensation de la théorie KAM: cette fois les compensations sont seulement partielles *mais* suffisantes (marginement).

PROBLÈME OUVERT:

Unicité (et relation avec résultats obtenus par méthodes alternatives)



10

Formulation précise de HJ (à ω (C, τ)-Diophant. fixé)

$$F(\mathbf{A}', \boldsymbol{\alpha}) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} (\mathbf{A}' + \partial_{\boldsymbol{\alpha}} \Phi(\mathbf{A}', \boldsymbol{\alpha}))^2 + \varepsilon f(\boldsymbol{\alpha})$$

$\exists \mathbf{A}'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}'_\infty$ et ρ_n, ξ tel que dans $S_{\rho_n}(\mathbf{A}'_n) \times (\mathbb{T}^\ell)_\xi$

$$\Phi_n(\mathbf{A}'_n, \boldsymbol{\alpha}) \Rightarrow \begin{cases} \partial_{\boldsymbol{\alpha}} \Phi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{H}(\boldsymbol{\alpha}), & \partial_{\mathbf{A}'} \Phi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{h}}(\boldsymbol{\alpha}) \\ \partial_{\boldsymbol{\alpha}}^2 \Phi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{H}'(\boldsymbol{\alpha}), & \partial_{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A}'}^2 \Phi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{H}''(\boldsymbol{\alpha}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} (\mathbf{A}'_\infty + \tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\alpha}))^2 + \varepsilon f(\boldsymbol{\alpha}) = E = \boldsymbol{\alpha} - \text{indep.} \\ \partial_{\mathbf{A}'} F(\mathbf{A}'_n, \boldsymbol{\alpha}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\alpha} + \tilde{h}(\boldsymbol{\alpha}) \longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\psi} + \mathbf{h}(\boldsymbol{\psi}) \\ \boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\omega} t \text{ est solution} \end{cases}$$