

Il nuovo paradigma del caos, l'irreversibilità e l'entropia

Fino a tempi recenti, moto di un sistema \Rightarrow modelli *armonici*:
cfr. turbolenza in LANDAU-LIFSHITZ, (1968).

Moti irregolari = moti con molte armoniche diverse. Concezione
Aristotelica: tutti i moti composti di moti circolari uniformi

$$O(t) = o_n(\omega_1 t, \dots, \omega_n t)$$

dove $o_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ è una funzione periodica di n -angoli.
Concezione “*tolemaica*” inalterata da IPPARCO a TOLOMEO
e GALILEO, KEPLERO, NEWTON, LAPLACE.

Nel caso semplice in cui una armonica prevalga sulle altre.
In tal caso la si chiama *deferente* e le altre *epicicli*

Nel caso semplice in cui una armonica prevalga sulle altre.
 In tal caso la si chiama *deferente* e le altre *epicicli*

$$O(t) = o_{\underline{k}_{max}} e^{i\underline{k} \cdot t} \left(1 + \sum_{\underline{k} \neq \underline{k}_{max}} e^{i(\underline{k} - \underline{k}_{max}) \cdot \omega t} \frac{o_{\underline{k}}}{o_{\underline{k}_{max}}} \right) =$$

$$\equiv A_0 e^{i\omega_0 t} \left(1 + \frac{a_1}{A_0} e^{i\omega_1 t} \left(1 + \frac{a_2}{a_1} e^{i\omega_2 t} (\dots) \right) \right)$$

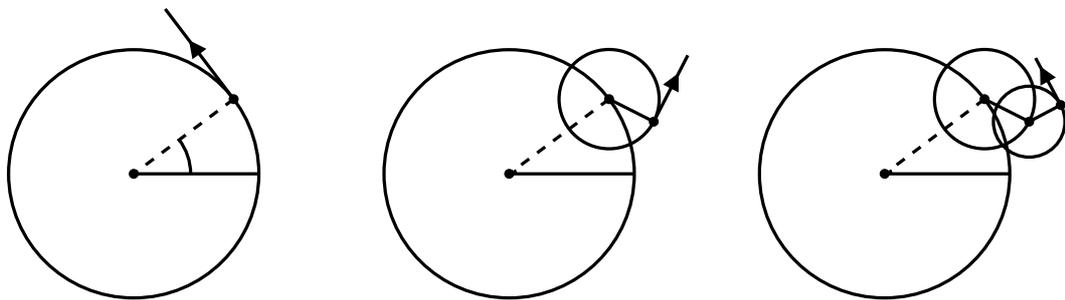


Fig.1 Moto su un deferente di raggio A_0 , o su un epiciclo di raggio a_1 con centro rotante sul deferente, o su un epiciclo di raggio a_2 con centro su un secondo epiciclo di raggio a_1 il cui centro si muove sul deferente ...

Così il moto dei pianeti esterni era, per Ipparco del tipo

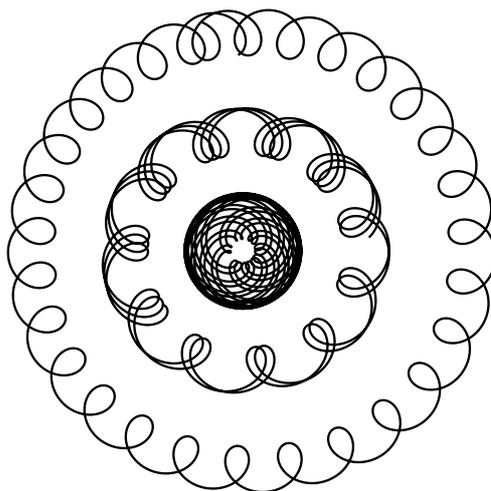


Fig.3: *Moto geocentrico dei pianeti esterni (Marte, Giove e Saturno) visto dalla Terra rispetto alle stelle fisse: Sistema tolemaico.*

Né l'*equante* di Tolomeo cambiò la rappresentazione

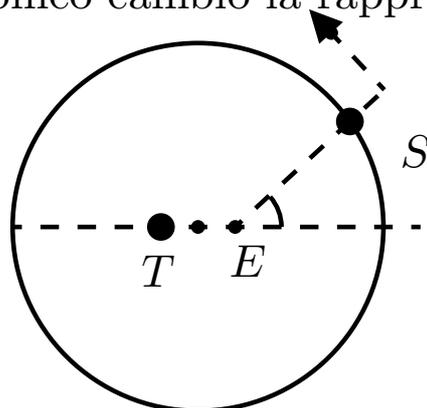


Fig.2: *T=Terra, S=Sole, E="punto equante": una leva ES ruota uniformemente spingendo S.*

Con COPERNICO il moto rimane ancora composto da moti circolari uniformi, anche se la rappresentazione diviene apparentemente più semplice: rimangono deferente e epicicli ma appena visibili in figura.

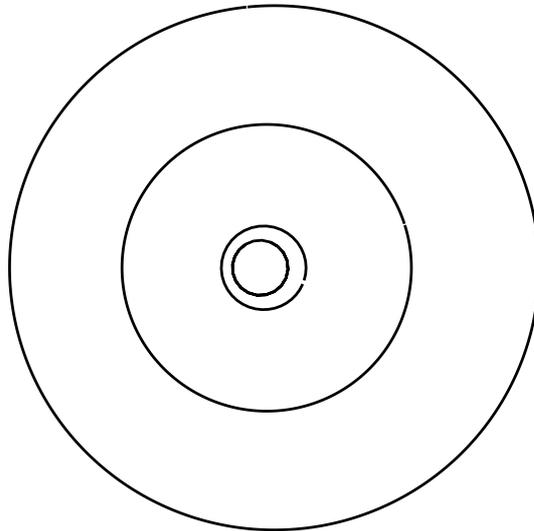
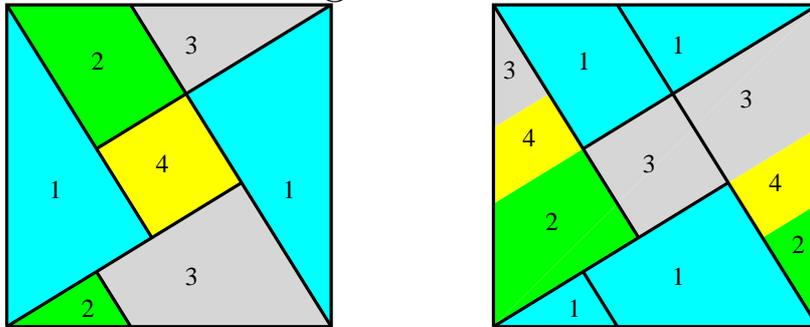


Fig.4. Moti dei pianeti esterni nella teoria Eliocentrica di Copernico o Keplero. La teoria di Copernico non era più precisa di quella di Tolomeo. Qui l'orbita centrale è della Terra (in scala).

È solo con POINCARÉ (anzi tempo), BIRKHOFF, (pure anzi tempo) e KOLMOGOROV, ANOSOV, LORENZ, RUELLE che si riconosce che sono non solo possibili, ma molto comuni, moti che non possono essere rappresentati come quasi periodici.

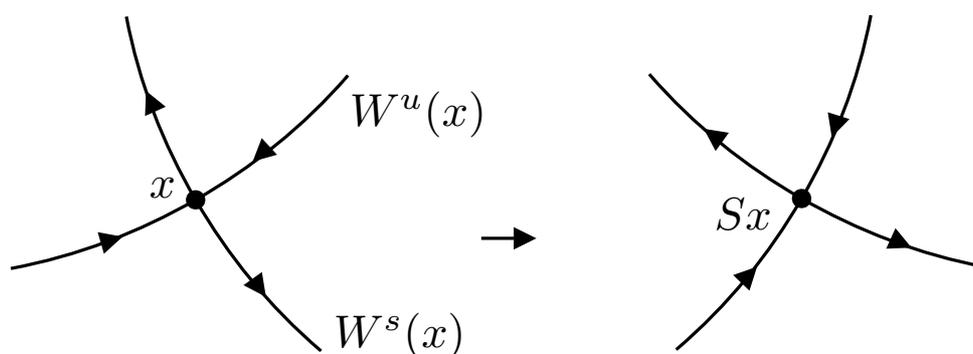
Addirittura utilizzabili come generatori di numeri casuali. L'esempio più semplice: trasformazione del toro T^2 definita da $(\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (\varphi_1 + \varphi_2, \varphi_1)$ rappresentata in figura via la sua azione sui 4 insiemi rettangolari.



A parte un insieme di misura nulla di dati, seguendo l'evoluzione di un punto e segnando la successione delle etichette dei rettangoli visitati si ottiene una successione a quattro valori che è indistinguibile dai lanci successivi di un dado a 4 facce, truccato in modo che siano solo possibili, ed equiprobabili se possibili, le transizioni.

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

Più in generale moti caotici sono generati da *sistemi iperbolici*. Sono questi sistemi dinamici in cui si può definire



Riferimento covariante con assi stabile e instabile per x .

\exists orbita densa e coordinate locali “covarianti, continue e iperboliche”: se $x \rightarrow Sx$ il punto x seguito nel suo moto, e quindi fisso in questo riferimento, appare come iperbolico con esponenti attrattivo e repulsivo uniformemente lontani da 0.

I sistemi reali *non sono di Anosov*. Tuttavia i sistemi di Anosov forniscono un *paradigma del caos*, introdotto dai lavori di Lorenz, Ruelle-Takens. Recentemente formulato come

Ipotesi caotica: *Un sistema dinamico caotico può essere considerato come se fosse un sistema di iperbolico*

Ipotesi analoga all'ipotesi *tolemaica* che suppone moti quasi periodici. O anche all'ipotesi *ergodica* che vuole che il moto sulla superficie di energia costante non abbia integrali primi.

Implicazioni profonde: *e.g.* esistenza di distrib. di probabilità μ che consente di esprimere i valori medi delle osservabili:

$$\frac{1}{T} \sum_{j=0}^{T-1} F(S^j x) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int F(y) \mu(dy)$$

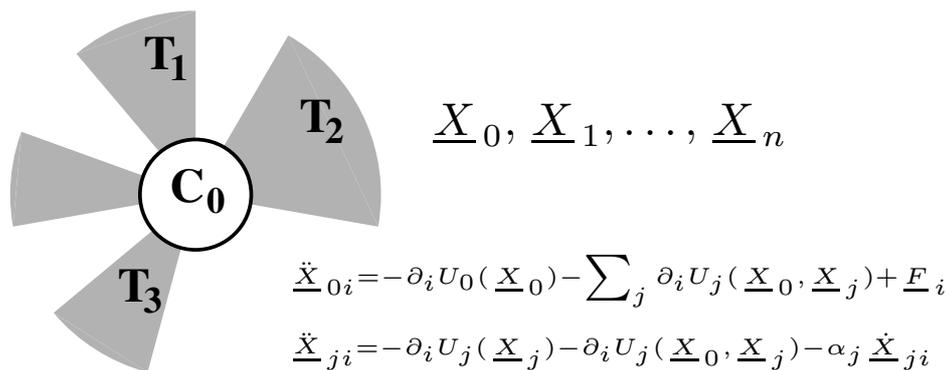
per tutti i dati iniziali tranne un insieme di volume nullo.

Più importante: *è possibile una espressione analitica per μ .*
Coincide con la distribuzione uniforme: ossia implica l'ipotesi ergodica; ma valida anche in sistemi “fuori equilibrio” di cui descrive uno stato stazionario.

Importanti fenomeni dissipativi: \Rightarrow modellati da sistemi “infiniti”.

Per la necessaria presenza di *termostati* che assorbano l’energia quindi da equazioni non Hamiltoniane qualora si vogliano modelli “finiti”, e studiabili a mezzo di simulazioni.

È recente l’introduzione di modelli finiti di termostati, (Nosé, Hoover, Evans, Morriss): hanno profondamente modificato la concezione dei moti dissipativi, assegnato ruolo paradigmatico ai sistemi di Anosov e collegato la teoria del caos in Fluidodin. e la Mecc. Stat. del non equilibrio. Un esempio



Punti in \mathcal{C}_0 interagiscono con termostati a temperature T_1, T_2, \dots

Le forze tutte conservative con potenziali $U_j(\underline{X}_j)$ interni e $U_{0,j}$ fra sist. e term.. Aggiunt forze “dissipative” mantenenti energia cinetica totale K_j dei termostati esattamente costante $K_j = \frac{3}{2}N_j k_K T_j$. Si trova

$$\alpha_j \equiv \frac{Q_j - \dot{U}_j}{2K_j}$$

ove Q_j è il lavoro per unità di tempo di \mathcal{C}_0 su j -mo termostato, ossia quantità di calore riversata dal sistema in \mathcal{C}_0 .

Sistema assai generale per modelli di trasporto di calore. Le caratteristiche empiriche (simulazioni) o analitiche sono

- (1) **Moti caotici:** in senso empirico, ossia imprevedibili su scale di tempo confrontabili a quella dell'evoluzione stessa
- (2) **Dissipazione:** ossia *non conservazione del volume totale dello spazio delle fasi*. La divergenza σ delle equazioni del moto non solo non 0 ma con media temporale $\sigma_+ \stackrel{def}{=} > 0$

Si trova per calcolo diretto

$$\begin{aligned}\sigma(\underline{\dot{X}}, \underline{X}) &= \varepsilon(\underline{\dot{X}}, \underline{X}) + \dot{R}(\underline{X}) \\ \varepsilon(\underline{\dot{X}}, \underline{X}) &= \sum_{j>0} \frac{Q_j}{k_B T_j}, \quad R(\underline{X}) = \sum_{j>0} \frac{U_j}{k_B T_j} \\ \sigma_+ &\stackrel{def}{=} \langle \sigma \rangle \equiv \int \sigma d\mu \equiv \int \varepsilon d\mu > 0\end{aligned}$$

Pertanto la statistica SRB, μ , del moto è concentrata su un insieme di volume nullo.

(3) **Irreversibilità:** le equazioni sono *reversibili* e ciononostante le proprietà statistiche del moto non lo sono (media nel futuro \neq media nel passato).

contrazione del volume ha espressione molto generale. Inoltre

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \int_0^T (F(S_t(\underline{X}, \underline{\dot{X}})) + \dot{R}(S_t(\underline{X}, \underline{\dot{X}}))) dt &= \\ = \frac{1}{T} \int_0^T F(S_t(\underline{X}, \underline{\dot{X}})) dt + \frac{R_T - R_0}{T}\end{aligned}$$

quindi $\langle \sigma \rangle = \langle \varepsilon + \dot{R} \rangle = \langle \varepsilon \rangle \stackrel{def}{=} \sigma_+ > 0$.

Ipotesi caotica conduce a proprietà assai generali della distribuzione SRB. Cito *teorema di fluttuazione*, G-Cohen 1995, sulle fluttuazioni contrazione del volume σ : posto

$$p = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\sigma(t)}{\sigma_+} dt$$

(Sinai), *per sistemi di Anosov*, \rightarrow legge di grandi deviazioni

$$probabilità_{SRB}(p \in [a, b]) = e^{\tau \max_{p \in [a, b]} \zeta(p) + O(1)}$$

con $\zeta(p)$ analitica in (p_-, p_+) . Se sistema è Anosov e reversibile (nel senso che \exists isometria I tale che $IS_t = S_{-t}I$ (es. inversione di velocità) \Rightarrow **teorema:** $p_+ = -p_- \stackrel{def}{=} p^* \geq 1$ e

$$\zeta(-p) = \zeta(p) - p\sigma_+, \quad |p| < p^*$$

+ ipotesi caotica \Rightarrow relazione universale, senza parametri, per le *grandi(ssime)* fluttuazioni della contrazione del volume e quindi della creazione di entropia.

La contrazione è misurabile in simulazioni mentre la creazione di entropia in esperimenti: la connessione (più generale di quanto sopra) rende osservabile la relazione di fluttuazione e quindi verificabile l'ipotesi caotica.

Non si deve dimenticare: radici dell'ipotesi caotica sono nella Fluidodinamica. Con condizioni al bordo periodiche NS

$$\begin{aligned} \underline{\dot{u}} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} &= \nu \Delta \underline{u} - \underline{\partial} p + f \underline{g}, & R &= \frac{\sqrt{fL}}{\nu} \\ \underline{\partial} \cdot \underline{u} &= 0 \end{aligned}$$

In realtà si pensa alle equazioni troncate $|\underline{k}| \leq K_k = L^1 R^{\frac{3}{4}}$, $N \simeq R^{\frac{9}{4}}$, cioè si suppone la teoria OK41.

Queste sono equazioni “irreversibili”. Si considerino altresì

$$\begin{aligned} \underline{\dot{u}} + \underline{u} \cdot \underline{\partial} \underline{u} &= \alpha(\underline{u}) \Delta \underline{u} - \underline{\partial} p + f \underline{g}, \\ \alpha &= \frac{\int \underline{u} \cdot f \underline{g}}{\int (\underline{\partial} \underline{u})^2} \Rightarrow \int \underline{u}^2 = \mathcal{E} = const \end{aligned}$$

Sono invece *reversibili*: congettura stessa statistica per le

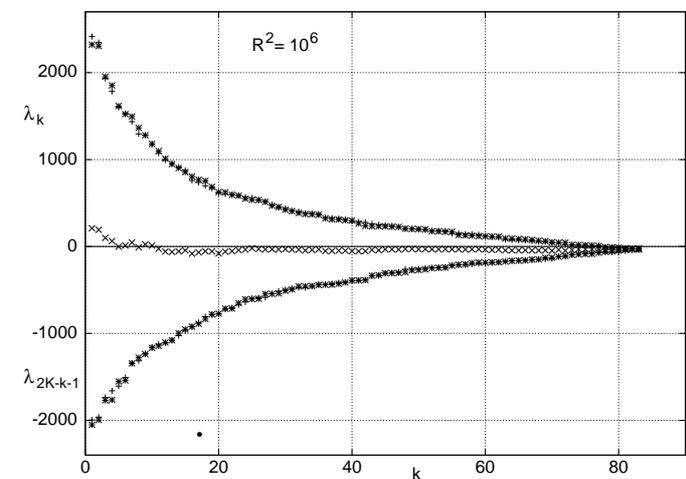
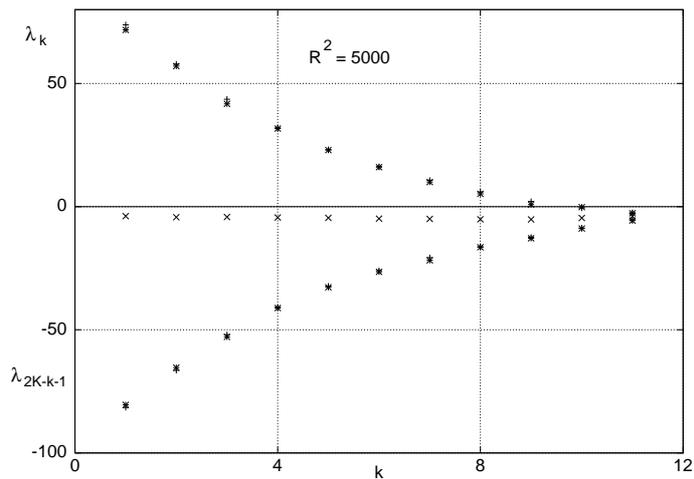
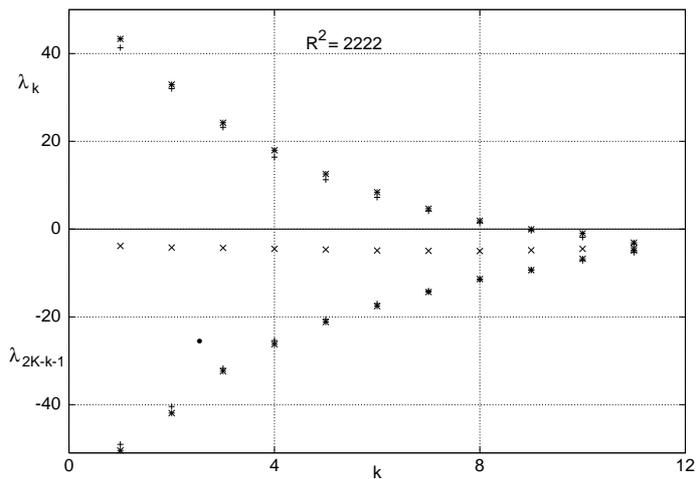
osservabili *locali* $\Rightarrow F$, ossia che dipendono da un numero finito di componenti di Fourier di \underline{u}

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{\underline{k}} \underline{u}_{\underline{k}} e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}}, \quad \underline{u}_{\underline{k}} \cdot \underline{k} = 0$$

purchè $R \rightarrow \infty$ e \mathcal{E} sia scelto in modo che $\mathcal{E} = \langle \int \underline{u}^2 \rangle_{\mu\nu}$ (condizione di equivalenza).

Verificabile in simulazioni, (G-Rondoni-Segre) almeno in troncamenti “severi” e dimensione 2: dal punto di vista matematico è una proprietà di “omogenizzazione” ed una congettura.

Lo studio non facilmente eseguibile per troncamenti realistici: in RS e GRS ne sono stati studiati alcuni aspetti su modelli severamente troncati (a 24 o 168 modi) e un risultato che sembra sorprendente e che andrebbe confermato con studi più dettagliati e accurati è messo in evidenza dal fatto che gli esponenti di Lyapunov sembrano essere “gli stessi” per i due casi: come illustrato dalle figure seguenti



L'equivalenza conduce a pensare, sebbene le due equazioni siano certamente diverse, che, ciononostante, *possano coincidere statisticamente* su una scala di lunghezza opportuna.

L'attrito in NS varia con la scala k e ad una scala opportuna può divenire uguale all'attrito di ED

Per OK41 $v_k^3 k = \text{constant} = \eta\nu$ in NS: ma sembra (da simulazioni) che a taglio fissato (regolarizzazione fissata) k_χ si abbia equipartizione tra i modi. Allora $\langle |\underline{u}_k|^2 \rangle \equiv \gamma^2$

$$\frac{4\pi}{3} \gamma^2 \left(k_\chi \frac{L}{2\pi} \right)^3 = \varepsilon, \quad \text{densità di energia all'equipartizione}$$

$$K_E(k) = \frac{3\varepsilon}{4\pi} \frac{k^2}{k_\chi^3}, \quad \text{densità di energia fra } k \text{ e } k + dk$$

$$v_k^3 k = \left((kL)^3 \gamma^2 \right)^{\frac{3}{2}} k = \varepsilon^{\frac{3}{2}} k_\chi \left(\frac{k}{k_\chi} \right)^{\frac{11}{2}}, \quad \text{dissipaz. a scala } k$$

Se $\varepsilon^{\frac{3}{2}} k_\chi \left(\frac{k}{k_\chi} \right)^{\frac{11}{2}} = \eta\nu$ allora (congettura) NS e ED \Rightarrow stessa statistica su scala k : ossia osservabili dipendenti solo dalle componenti di Fourier su scala k hanno \equiv statistica (nel limite $R \rightarrow \infty$). Ad esempio, raddoppiando ν in NS le statistiche dovrebbero essere uguali su una scale 1.3 più alta.

Dunque k , o $\log \frac{k}{k_\chi}$, analogo all'altezza e la dissipazione è l'analogo della pressione nella usuale formula barometrica.

<http://ipparco.roma1.infn.it>

Il problema dell'irrev. di NS è analogo a quello della conduzione di cariche elettriche in un circuito chiuso con una forza elettromotrice costante E moventesi urtando contro ostacoli regolari (reticolo cristallino) dissipando energia verso le vibrazioni degli atomi del reticolo. Modello: contenitore periodico (“cristallo”) di sfere dure in cui le cariche, pur esse sfere, si muovono nel campo E con dissipazione costante ν

$$\ddot{x}_i = E + \text{collisioni elastiche} - \nu \dot{x}_i, \quad i = 1, \dots, N$$

Ovviamente non è reversibile, almeno non nel senso ingenuo. Congettura: *equivalente* statisticamente, per $N \rightarrow \infty$, a

$$\ddot{x}_i = E + \text{collisioni elastiche} - \alpha(\dot{x})\dot{x}_i, \quad i = 1, \dots, N$$

ove α è definito in modo che l'energia cinetica totale del sistema sia $\frac{3}{2}Nk_B T$ *identicamente costante* (principio di Gauss)

$$\alpha = \frac{E \sum_j \dot{x}_j}{\sum_j \dot{x}_j^2}$$

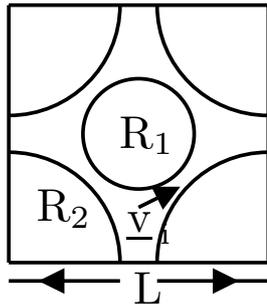
e la costante sia fissata in modo che l'energia cinetica sia uguale alla energia cinetica media $\langle \frac{1}{2} \sum_j \dot{x}_j^2 \rangle_{SRB}$ del modello irreversibile (che dipende solo da ν se il moto è caotico) e per questo ci si aspetta, per l'ipotesi caotica, che le flutt. della contrazione del volume verifichino la relazione di flutt.

Questo sistema è reversibile, studiato analiticamente per E piccolo, dimostrandone la caoticità (+ debole che Anosov) nel caso $N = 1$ (!) e $d = 2$ (Chernov, Eyink, Lebowitz, Sinai) e per $N = 2, 10$ (Bonetto, G, Garrido) in simulazioni, a $d = 2$, (una delle prime verifiche della relazione di flutt.)

Ovviamente nel primo modello la contrazione del volume non fluttua affatto, essendo costantemente uguale a $\nu d N$: situazione assai simile a quella delle fluttuazioni di densità in un gas chiuso in un contenitore ideale: la densità globale non fluttua ma localmente in piccoli volumi si osservano fluttuazioni importanti del numero di particelle contenute. Così Così diventa possibile che la contrazione σ_{loc} locale in una regione

Δ (piccola rispetto al volume totale), definita come $\sigma_{loc} = 3N(\Delta) \frac{E \sum_{x_j \in \Delta} \dot{x}_j}{\sum_{j \in \Delta} \dot{x}_j^2}$ fluttui, e lo faccia con la stessa statistica sia nel modello reversibile che nel modello irreversibile almeno per $N \rightarrow \infty, N/V = cost$ (“limite termodinamico”).

Altro esempio (teoria di Drude della conducibilità)



$$\ddot{\underline{q}}_i = E \underline{u} + \text{collisioni} - \#_i: e$$

velocità rinormalizzata a $\sqrt{3k_B\Theta}$

o mantiene vel. costante: $\#_i = \alpha(\dot{\underline{q}}) \dot{\underline{q}}_i$, $\alpha \equiv \frac{E \cdot \sum \dot{\underline{x}}_i}{\sum \dot{\underline{x}}_i^2}$

o si impone viscosità: $\#_i = -\nu \dot{\underline{q}}_i$

Se $F(\underline{p}, \underline{q}) > 0$ è un'osservabile locale $\frac{\mu_\nu(F)}{\mu_{\mathcal{E}}(F)} \xrightarrow{L \rightarrow \infty, N/L = \rho} 1$
 $\mathcal{E} = \frac{3}{2} NkT$

purchè ν sia aggiustato in modo che $\langle \mathcal{E} \rangle_{\mu_\nu} = \mathcal{E}_0$. Questa è una “equivalenza di insiemi statistici”:

analogia: $\nu =$ temper. canonica e $\mathcal{E} =$ energia microcan.
