Da: G.Gallavotti, *Mathematical Foundations of turbulent viscous flows*, ed. M.Cannone, T.Miyakawa, Springer, Lecture Notes in Mathematics, **1971**, p.45–74, 2006.

Soluzione di Leray: limite (debole in L_2 *su sottosuccessioni*, $\lambda \to \infty$)

$$\dot{\underline{u}} = \nu\Delta\underline{u} - \langle \underset{\sim}{u}\rangle_\lambda \cdot \underset{\sim}{\partial}\,\underline{u} - \underline{\partial}p, \qquad \underline{\partial}\cdot\underline{u} = 0, \qquad \int_\Omega \underline{u}\,d\underline{x} = \underline{0}$$

$\langle\underline{u}\rangle_\lambda = \int_\Omega \lambda^3\chi(\lambda(\underline{x}-\underline{y}))\underline{u}(\underline{y})\,d\underline{y}$: cond. periodiche su Ω, $\chi \in C^\infty$, $\underline{g} \equiv \underline{0}$

Pressione:

$$p = -\sum_{ij}\Delta^{-1}\partial_i\partial_j(u_iu_j) \equiv -\Delta^{-1}\underset{\sim}{\partial}\,\underline{\partial}(\underline{u}\,\underset{\sim}{u}) \equiv -\Delta^{-1}(\underset{\sim}{\partial}\,\underline{u})^2$$

Stime *a priori* e relazioni di conservazione per "coppie *Pseudo NS*" $(\underline{u}, p)$

$$(o)\qquad ||\underline{u}^\lambda(t)||_2^2 \le E_0 L^{-3}, \qquad \int_0^t d\tau ||\underset{\sim}{\underline{\partial u}}^\lambda(\tau)||_2^2 \le \frac{1}{2}\, E_0 L^{-3}\, \nu^{-1}$$

$$(a)\qquad \int_\Omega \underline{u}\, d\underline{x} = \underline{0}, \qquad \underline{\partial} \cdot \underline{u} = \underline{0}, \qquad p = -\sum_{i,j} \partial_i \partial_j \Delta^{-1}(u_i u_j)$$

$$(b)\qquad \int_0^T dt \int_\Omega d\underline{x}\, |\underline{u}|^{10/3} + \int_0^T dt \int_\Omega d\underline{x}\, |p|^{5/3} < \infty$$

$$(c)\qquad \frac{1}{2} \int_\Omega d\underline{x}\, |\underline{u}(\underline{x}, s)|^2 \varphi(\underline{x}, s) + \nu \int_{t\le s} \int_\Omega \varphi(x,t) |\underset{\sim}{\underline{\partial u}}|^2 d\underline{x} dt \le$$

$$\le \int_{t \le s} \int_\Omega \Big[\frac{1}{2}(\varphi_t + \nu\, \Delta\varphi)|\underline{u}|^2 + \frac{1}{2}|\underline{u}|^2 \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{\partial}\varphi + p\, \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{\partial}\varphi\Big]\, d\underline{x}\, dt$$

$\varphi \ge 0$ è una funzione C^∞ nulla vicino a $t = 0$.

Disuguaglianze cinematiche (in C^∞):

$$(H)\qquad \left|\int f_1 f_2\ldots f_n\right| \le \prod_{i=1}^n \left(\int |f_i|^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}}$$

$$(P)\qquad \int_{B_r} d\underline{x}\,|f-F|^\alpha \le C^P_\alpha\, r^{3-2\alpha}\left(\int_{B_r} d\underline{x}\,|\underline{\partial} f|\right)^\alpha, \qquad 1\le\alpha\le\frac{3}{2}$$

$$(S)\qquad \int_{B_r} |\underline{u}|^q\, d\underline{x} \le C^S_q \Big[\left(\int_{B_r} (\underset{\sim}{\underline{\partial} \underline{u}})^2\, d\underline{x}\right)^a \cdot \left(\int_{B_r} |\underline{u}|^2\, d\underline{x}\right)^{q/2-a} +$$

$$+\, r^{-2a}\left(\int_{B_r} |\underline{u}|^2\, d\underline{x}\right)^{q/2}\Big] \qquad \text{if } 2\le q\le 6, \quad a=\frac{3}{4}(q-2)$$

$$(CZ)\qquad \int_\Omega |\sum_{i,j}(\Delta^{-1}\partial_i\partial_j)(u_iu_j)|^q d\underline{\xi} \le C^L_q \int_\Omega |\underline{u}|^{2q} d\underline{\xi}\,, \quad 1<q<\infty$$

Proposizione: *(velocità illimitata vicino alle singolarità): Sia* $\underline{u}(\underline{x},t)$ *una soluzione di Leray delle equazioni in* L_2*. Dato* $t_0 > 0$ *si supponga che* $|\underline{u}(\underline{x},t)| \le M$*,* $(\underline{x},t) \in U_\rho(\underline{x}_0,t_0) \equiv$ *sfera di raggio* ρ *(*$\rho < t_0$*) intorno a* $(\underline{x}_0,t_0)$*, con* $M < \infty$*: allora* $\underline{u} \in C^\infty(U_{\rho/2}(\underline{x}_0,t_0))$*.* (Leray–Serrin)

– –

Sia $(\underline{x}_0,t_0) \in \Omega \times (0,\infty)$ e si considerino gli insiemi

$$\begin{aligned}
\Delta_r(t_0) =& \{t|\,|t-t_0| < r^2\nu^{-1}\}\\
B_r(\underline{x}_0) =& \{\underline{\xi}\,|\,|\underline{\xi}-\underline{x}_0| < r\} \equiv B_r\\
Q_r(\underline{x}_0,t_0) =& \{(\underline{\xi},\vartheta)\,|\,|\underline{\xi}-\underline{x}_0| < r,\, |\vartheta - t_0| < r^2\nu^{-1}\}\\
Q_r(\underline{x}_0,t_0) =& \Delta_r(t_0) \times B_r(\underline{x}_0) \equiv Q_r
\end{aligned}$$

– –

("operatori" adimensionali su scala r per NS)

$$A(r) = \frac{1}{\nu^2 r} \sup_{|t-t_0|\le \nu^{-1} r^2} \int_{B_r} |\underline{u}(\underline{\xi},t)|^2 \, d\underline{\xi} \qquad (\text{“op. energia”: dim.=1})$$

$$\delta(r) = \frac{1}{\nu r} \int_{Q_r} d\vartheta d\underline{\xi} \, |\underset{\sim}{\partial} \, \underline{u}|^2 \qquad (\text{“op. loc. Reynolds”: dim.=1})$$

$$G(r) = \frac{1}{\nu^2 r^2} \int_{Q_r} d\vartheta d\underline{\xi} \, |\underline{u}|^3 \qquad (\text{“op. flusso energia”: dim.=2})$$

$$J(r) = \frac{1}{\nu^2 r^2} \int_{Q_r} d\underline{\xi} d\vartheta \, |\underline{u}| \, |p| \qquad (\text{“op. potenza di press.”: dim.=2})$$

$$K(r) = \frac{r^{-13/4}}{\nu^{3/2}} \int_{\Delta_r} d\vartheta \Big(\int_{B_r} |p| \, d\underline{\xi} \Big)^{5/4} \qquad (\text{“op. non località”: dim.=}\tfrac{13}{4})$$

$$S(r) = \frac{r^{-5/3}}{\nu^{7/3}} \int_{Q_r} (|\underline{u}|^{10/3} + |p|^{5/3}) d\vartheta d\underline{\xi} \qquad (\text{“op. intensità”: d.=}\tfrac{5}{3})$$

– –

Esempio di relazioni tra operatori. Sia $\varphi = \chi(\underline{x},t)\,\frac{\exp-\big(\frac{(\underline{x}-\underline{x}_0)^2}{4(\nu(t_0-t)+2r^2)}\big)}{(4\pi\nu(t-t_0)+8\pi r^2)^{3/2}}$ ove $\chi(\underline{x},t)=1$ se $(\underline{x},t)\in Q_{r/2}$ e $=0$ fuori Q_r. Esiste $C>0$ t.c.

$$\begin{aligned} &|\varphi|<\frac{C}{r^3},\quad |\underline{\partial}\varphi|<\frac{C}{r^4},\qquad |\partial_t\varphi+\nu\Delta\varphi|<\frac{C}{\nu^{-1}r^5},\qquad &&\text{ovunque in } Q_r\\ &|\varphi|>\frac{1}{Cr^3}, &&\text{if}\quad (\underline{x},t)\in Q_{r/2}\end{aligned}$$

Quindi per le poprietà pseudo–NS

$$\frac{\nu^2}{Cr^2}\big(A(\tfrac{r}{2})+\delta(\tfrac{r}{2})\big)\le C\,\big(\frac{1}{\nu^{-1}r^5}\int_{Q_r}|\underline{u}|^2+\frac{1}{r^4}\int_{Q_r}|\underline{u}|^3+\frac{1}{r^4}\int_{Q_r}|\underline{u}||p|\big)$$

e, poiché $\int_{Q_r}|\underline{u}|^2\le C\,(\int_{Q_r}|\underline{u}|^3)^{2/3}(\nu^{-1}r^5)^{1/3}$, segue

$$A(\tfrac{r}{2})+\delta(\tfrac{r}{2})\le\tilde{C}\,\big(G(r)^{2/3}+G(r)+J(r)\big)$$

– –

Dim: da $|\varphi| > \frac{1}{Cr^3}$, se $(\underline{x},t) \in Q_{r/2}$ e

$$|\varphi| < \frac{C}{r^3}, \quad |\underline{\partial}\varphi| < \frac{C}{r^4}, \qquad |\partial_t\varphi + \nu\Delta\varphi| < \frac{C}{\nu^{-1}r^5}, \qquad \text{everywhere}$$

e dalla disuguaglianza dell'energia:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega d\underline{x}\,|\underline{u}(\underline{x},s)|^2\varphi(\underline{x},s) + \nu\int_{t\le s}\int_\Omega \varphi(x,t)|\underline{\partial}\underset{\sim}{u}|^2 d\underline{x}dt \le$$

$$\le \int_{t\le s}\int_\Omega \Big[\frac{1}{2}(\varphi_t + \nu\,\Delta\varphi)|\underline{u}|^2 + \frac{1}{2}|\underline{u}|^2\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{\partial}\varphi + p\,\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{\partial}\varphi\Big]\,d\underline{x}\,dt$$

segue $\frac{1}{2}\sup_{\Delta_{r/2}}\int_{B_{r/2}}|\underline{u}|^2\frac{1}{r^3C} + \nu\int_{Q_{r/2}}|\underset{\sim}{\partial}\underline{u}|^2\frac{1}{r^3C}$ stimata da

$$\Big(\frac{C\nu}{r^5}\int_{Q_r}|\underline{u}|^2 + \frac{C\nu}{r^4}\int_{Q_r}|\underline{u}|^3 + \frac{C\nu}{r^4}\int_{Q_r}|\underline{u}||p|\Big)$$

Questa è una "*verifica tipica di disuguaglianze*"

− −

Teorema I: *(Scheffer): ($\nu \equiv 1$). Siano $\varepsilon_s, C > 0$ tali che se $G(r)+J(r)+K(r) < \varepsilon_s$ per un certo valore di r, allora $\underline{u}$ sia limitata in $Q_{\frac{r}{2}}(\underline{x}_0, t_0)$:*
$|\underline{u}(\underline{x}, t)| \le C\frac{\varepsilon_s^{1/3}}{r}, \quad \text{in } Q_{\frac{r}{2}}(\underline{x}_0, t_0)$

– –

Per Hölder si ha $J(r) + G(r) + K(r) \le C\left(S(r)^{9/10} + S(r)^{3/4}\right)$ dunque: *se $S(r)$ è piccolo abbastanza allora $(\underline{x}_0, t_0)$ è un punto regolare.*

– –

Teorema II: *("CKN"). Esiste una costante ε_{ckn} tale che se $(\underline{u}, p)$ è una coppia pseudo NS di velocità e pressione campi e*

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{\nu r}\int_{Q_r(\underline{x}_0, t_0)} |\underset{\sim}{\partial}\underline{u}(\underline{x}', t')|^2\, d\underline{x}'dt' \equiv \limsup_{r\to 0}\, \delta(r)\, <\, \varepsilon_{ckn}$$

allora $\underline{u}(\underline{x}', t')$, $p(\underline{x}', t')$ siano C^∞ nelle vicinanze di $(\underline{x}_0, t_0)$.

– –

Questo significa che vicino a $(\underline{x}, t)$ le funzioni $\underline{u}(\underline{x}', t'), p(\underline{x}', t')$ coincidono con funzioni C^∞ funzioni a meno di un insieme di nulla misura (i campi pseudo NS sono definiti come campi in $L_2(\Omega)$).

Come illustrazione dapprima discutiamo come un teorema di regolarità possa essere combinato con stime *a priori* al fine di ottenere una stima della dimensione frattale.

Definizione: *(α–misura di Hausdorff): La α–misura di Hausdorff di un insieme A in uno spazio metrico M è definita considerando per ciascun $\delta > 0$ tutti i ricoprimenti $\mathcal{C}_\delta$ di A da insiemi F chiusi e con diametro $0 < d(F) \leq \delta$ e ponendo*

$$\mu_\alpha(A) = \lim_{\delta \to 0} \inf_{\mathcal{C}_\delta} \sum_{F \in \mathcal{C}_\delta} d(F)^\alpha$$

La funzione boreliana A su Ω, $A \to \mu_\alpha(A)$, è completamente additiva. Dato A esiste un α_c t.c. $\mu_\alpha(A) = \infty$ if $\alpha < \alpha_c, \mu_\alpha(A) = 0$ if $\alpha > \alpha_c$. $\alpha_c =$ è la dimensione di Hausdorff di A, mentre $\mu_{\alpha_c}(A)$ è la misura di Hausdorff di A.

\- -

Una necessaria proprietà chiave delle soluzioni di Leray: “Se a un istante t_0 si ha $J_1(t_0) = L^{-1}\int(\underset{\sim}{\underline{\partial u}})^2 d\underline{x} < \infty$, cioè se il numero di Reynolds $R(t_0) \stackrel{def}{=} J_1(t_0)^{1/2}/V_c$, $V_c \stackrel{def}{=} \nu/L$ è $< +\infty$, allora la soluzione rimane regolare in $(t_0, t_0+\tau]$ con

$$\tau = F\frac{T_c}{R(t_0)^4}, \qquad T_c = \frac{L^2}{\nu}$$

Da quest essa consegue che esiste $A > 0$ tale che se

$$\liminf_{\sigma\to 0}\Big(\frac{\sigma}{T_c}\Big)^{\frac12}\int_{t-\sigma}^{t}\frac{d\vartheta}{\sigma}R^2(\vartheta) < A$$

allora $\tau > \sigma$ e la regolarità è in un intervallo che contiene t talmente che gli instanti t è un istante in cui la soluzione è regolare. Infatti esisterà una successione $\sigma_i \to 0$ tal che

$$\int_{t-\sigma_i}^{t}\frac{d\vartheta}{\sigma_i}\,R^2(\vartheta) < A\Big(\frac{\sigma_i}{T_c}\Big)^{-\frac12}$$

quindi, essendo il membro di sinistra una media temporale, debbono esistere $\vartheta_{0i} \in (t-\sigma_i, t)$ t.c.

$$R^2(\vartheta_{0i}) < A\Big(\frac{\sigma_i}{T_c}\Big)^{-\frac{1}{2}}$$

ottenendo regolarità negli intervallo $(\vartheta_{0i}, \vartheta_{0i}+\tau_i)$ con lunghezza τ_i almeno

$$\tau_i = FT_c \frac{(\sigma_i/T_c)}{A^2} > \sigma_i$$

Se t è nell'insieme S di singolarità deve essere

$$\liminf_{\sigma\to 0} \Big(\frac{\sigma}{T_c}\Big)^{\frac{1}{2}} \int_{t-\sigma}^{t} \frac{d\vartheta}{\sigma}\, R^2(\vartheta) \ge A \qquad \text{if } t \in S$$

cioè ogni punto di singolarità è coperto da un famiglia di infiniti intervalli F con diametri σ *arbitrariamente picoli* e soddisfacenti

$$\int_{t-\sigma}^{t} d\vartheta\, R^2(\vartheta) \ge \frac{A}{2}\sigma\Big(\frac{\sigma}{T_c}\Big)^{-\frac{1}{2}}$$

Per il teorema del ricoprimento di Vitali, assegnati $\delta > 0$, $\Rightarrow$ esiste una famiglia numerabile di intervalli $F_1, F_2, \ldots$, con $F_i = (t_i - \sigma_i, t_i)$, due a due disgiunti e verificante la disuguaglianza $\sigma_i < \delta/4$, t.c. gli intervalli $5F_i \stackrel{def}{=} (t_i - 7\sigma_i/2, t_i + 5\sigma_i/2)$ (ottenuti da dilatando gli F_i di un fattore 5 intorno al loro centro) ricoprono S: $S \subset \cup_i 5F_i$.

$$\begin{aligned}&\sum_i (5\sigma_i)\Big(\frac{5\sigma_i}{T_c}\Big)^{-\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} \sum_i \sigma_i \Big(\frac{\sigma_i}{T_c}\Big)^{-\frac{1}{2}} < \\ &< \frac{2\, 5^{\frac{1}{2}}}{A\sqrt{T_c}} \sum_i \int_{F_i} d\vartheta\, R^2(\vartheta) \le \frac{2\, 5^{\frac{1}{2}}}{A\sqrt{T_c}} \int_0^T d\vartheta\, R^2(\vartheta) < \infty\end{aligned}$$

perché $\int_0^T R^2(t)dt$ è (definizione) proporzionale a $\int_0^T \int_\Omega (\underline{\partial} \underset{\sim}{u})^2 dt\, d\underline{x}$ e questo è limitato *a priori* .

Il medesimo argomento può essere applicato alla stima della dimensione spazio–temporale della singolarità. Dal teorema II gli insiemi S_0 dei punti di singolarità spazio–temporale possono essere coperti da insiemi $C_r = S(\underline{x}, r) \times (t - \frac{1}{2}r^2\nu^{-1}, t + \frac{1}{2}r^2\nu^{-1}]$ con r arbitrariamente piccolo e tale che

$$\frac{1}{r\nu}\int_{t-\frac{r^2}{2\nu}}^{t+\frac{r^2}{2\nu}} d\vartheta \int_{S(\underline{x},r)} d\underline{x}\,(\underset{\sim}{\underline{\partial u}})^2 > \frac{1}{2}\varepsilon_{ckn}$$

Una famiglia di Vitali, F_i, di insiemi di forma $F_i = Q_{r_i}$ due a due disgiunti e tal che gli insiemi $5F_i$= insieme di punti $(\underline{x}', t')$ ricoprono gli singolarità insieme S_0. Gli insiemi F_i abbiano diametro $\mathrm{diam}(F_i) \le 18r_i$ dunque

$$\sum_i (18r_i)^1 \le \frac{36}{\nu\varepsilon_{ckn}} \sum_i \int_{F_i} (\underset{\sim}{\underline{\partial u}})^2 d\underline{\xi} dt \le \frac{36}{\nu\varepsilon_{ckn}} \int_0^T \int_\Omega (\underset{\sim}{\underline{\partial u}})^2 d\underline{\xi} dt < \infty$$

cioè la 1-misura di Hausdorff $\mu_1(S_0)$ dovrebbe essere $< \infty$, e dunque la dimensione di Hausdorff di S_0 è ≤ 1. Quindi $\mu_1(S_0) = 0$

Riduzione del teorema II al teorema I

A fissato $(\underline{x}_0, t_0)$, si consideri la "successione di lunghezza scales": $r_n \equiv L2^n$, con $n = 0, -1, -2, \ldots$. Sia

$$\alpha_n \stackrel{def}{=} A(r_n),\ \kappa_n \stackrel{def}{=} K_n^{8/5},\ g_n \stackrel{def}{=} G_n^{2/3},\ j_n \stackrel{def}{=} J_n,\ \delta_n \stackrel{def}{=} \delta(r_n)$$

Sia $\underline{X}_n \equiv (\alpha_n, \kappa_n, j_n, g_n) \in R_+^4$. La chiave è basata sulla stima della grandezza di $\underline{X}_n$ in termini della grandezza di $\underline{X}_{n+p}$ purché la stima del numero di Reynolds δ_{n+p} su scala $n+p$ sia $\le \delta$, *per qualsivoglia* $p > 0, 1 > \delta > 0$. La disuguaglianza è

$$\underline{X}_n \le \mathcal{B}_p(\underline{X}_{n+p}; \delta), \qquad p > 0,\ 0 < \delta < 1$$

dove $\mathcal{B}_p(\cdot; \delta)$ è una trasformazione dell'intero R_+^4. Chiamiamo $|\underline{X}|$ la somma delle componenti di $\underline{X} \in R_+^4$.

"Disuguaglianze cinematiche": cioè disuguaglianze dipendenti solo dal fatto che $\underline{u}$ è un campo a divergenza e media nulle, ed è in $L_2(\Omega)$ e $p = -\Delta^{-1}(\underset{\sim}{\partial}\,\underline{u})^2$

$$\begin{aligned}
J_n &\le C\,(2^{-p/5} A_{n+p}^{1/5} G_n^{1/5} K_{n+p}^{4/5} + 2^{2p} A_{n+p}^{1/2} \delta_{n+p})\\
K_n &\le C\,(2^{-p/2} K_{n+p} + 2^{5p/4} A_{n+p}^{5/8} \delta_{n+p}^{5/8})\\
G_n^{2/3} &\le C\,(2^{-2p} A_{n+p} + 2^{2p} A_{n+p}^{1/2} \delta_{n+p}^{1/2})
\end{aligned}$$

"Disuguaglianza dinamica": cioè una disuguaglianza basata sulla disuguaglianza dell'energia:

$$A_n \le C\,(2^p G_{n+p}^{2/3} + 2^p A_{n+p}\delta_{n+p} + 2^p J_{n+p})$$

Si chiami $\varepsilon = 2^{-p}$ e usi $(ab)^{1/2} \le (a+b)$, $a^x \le 1 + a$ per $x \le 1, a > 0$, e $(ab)^{1/2} \le \varepsilon^{2/5} a + \varepsilon^{-2/5} b$ e la $a^x b^y < 1 + a + b$ per $x > 0, y > 0, x + y \le 1$. Allora la disuguaglianza può essere scritta in termini di $\underline{X}_n, \delta_{n+p}$ come

$$\alpha_n \stackrel{def}{=} A(r_n),\ \kappa_n \stackrel{def}{=} K_n^{8/5},\ g_n \stackrel{def}{=} G_n^{2/3},\ j_n \stackrel{def}{=} J_n,\ \delta_n \stackrel{def}{=} \delta(r_n)$$

La dis. dinamica è iterata, usando le disug. per G_{n+p}, J_{n+p} e ancora la prima dis. cinem.: si esprime $G^{1/5}_{n+p}$ via A_{n+2p} con n sostituito da $n+p$:

$$\begin{aligned}\alpha_n \le C\,(& 2^{-p}\alpha_{n+2p} + 2^{3p}\delta^{1/2}_{n+2p}\alpha^{1/2}_{n+2p} + \\ & + 2^{p/5}(\alpha_{n+2p}\kappa_{n+2p})^{1/2} + 2^{7p/5}\delta_{n+2p}\alpha^{7/20}_{n+2p}\kappa^{1/2}_{n+2p} + \\ & + 2^{3p}\delta_{n+2p}\alpha_{n+2p})\end{aligned}$$

Le $(ab)^{\frac12} \le za + z^{-1}b$ and $a^x \le 1+a$ for $a,b,z,x>0$, $x\le 1$ la trasformano in una relazione fra α_n e $\alpha_{n+p}, \kappa_{n+p}$ ($p \to \frac12 p$). Nella rel. fra α_n e $\alpha_{n+p}, \kappa_{n+p}$ si sceglie $z = 2^{-p/5}$ disaccoppiando $2^{p/10}(\alpha_{n+p}\kappa_{n+p})^{1/2}$ e

$$\begin{aligned}\alpha_n &\le C\,(2^{-p/10}\alpha_{n+p} + 2^{3p/10}\kappa_{n+p} + \xi^\alpha_{n+p})\\ \kappa_n &\le C\,(2^{-4p/5}\kappa_{n+p} + \xi^\kappa_{n+p})\\ \xi^\alpha_{n+p} &\stackrel{def}{=} 2^{3p}\delta_{n+p}(\alpha_{n+p} + \kappa_{n+p} + 1)\\ \xi^\kappa_{n+p} &\stackrel{def}{=} 2^{3p}\delta_{n+p}\alpha_{n+p}\end{aligned}$$

Si fissa p una volta per tutte t.c. $2^{-p/10}C < \frac13$.

17
Allora se $C2^{3p}\delta_n$ è piccolo, ossia se δ_n è tale, *e.g.* per $\delta_n < \overline{\delta}$ *e per tutti* $|n| \geq \overline{n}$, la matrice

$$M = C \begin{pmatrix} 2^{-p/10} + 2^{3p}\delta_{n+p} & 2^{3p/10} + 2^{3p}\delta_{n+p} \\ 0 & 2^{-4p/5} + 2^{3p}\delta_{n+p} \end{pmatrix}$$

ha norma $< \frac{1}{2}$ e iterando

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \kappa_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_{n+p} \\ \kappa_{n+p} \end{pmatrix} + 2^{3p} C\delta_{n+p} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

l'iterazione contrae *qualsiasi disco nel piano* α, κ *nel disco di raggio const* $\overline{\delta}$ (con *const* $= 2\,2^{3p}C$). $\Rightarrow g_n, j_n$ sono definitivamente stimati proporzionalmente a $\overline{\delta}$ e quindi per δ così piccolo che $|\underline{X}_n| = |\alpha_n| + \kappa_n + j_n + g_n < \rho$ e il teorema di Scheffer si applica perché $G(r_n) + J(r_n) + K(r_n)$ possono diventare più piccoli di ε_s..

Esempio di disuguaglianze Dyn. per un campo pseudo–NS $(\underline{u}, p)$

$$A_n \le C\,(2^p G_{n+p}^{2/3} + 2^p A_{n+p}\delta_{n+p} + 2^p J_{n+p})$$

Sia $\varphi(\underline{x}, t) = \varphi_2(\frac{\underline{x}}{\rho}, \frac{t}{\rho^2}) \ge 0$ una funzione C^∞ che è 1 su $Q_{\rho/2}$ e 0 fuori Q_ρ; essa è : $0 \le \varphi(\underline{x}, t) \le 1$, $|\underline{\partial}\varphi| \le \frac{C}{\rho}$, $|\Delta\varphi| + |\partial_t\varphi| \le \frac{C}{\rho^2}$. Allora $\forall \bar{t} \in \Delta_{\rho/2}(t_0)$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega d\underline{x}\,|\underline{u}(\underline{x}, s)|^2\varphi(\underline{x}, s) + \nu\int_{t\le s}\int_\Omega \varphi(x,t)|\underline{\partial}\underset{\sim}{\underline{u}}|^2 d\underline{x}dt \le\\
&\le \int_{t\le s}\int_\Omega \Big[\frac{1}{2}(\varphi_t + \nu\,\Delta\varphi)|\underline{u}|^2 + \frac{1}{2}|\underline{u}|^2\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{\partial}\varphi + p\,\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{\partial}\varphi\Big]\,d\underline{x}\,dt
\end{aligned}$$

Il membro di sinistra è $\ge \int_{B_r\times\{\bar{t}\}} |\underline{u}(\underline{x}, \bar{t})|^2 d\underline{x}$ mentre quello di destra

$$\begin{aligned}
&\frac{C}{\rho^2}\int_{Q_\rho} dtd\underline{x}\,|\underline{u}|^2 + \frac{1}{2}\int_{Q_\rho} dtd\underline{x}\,(|\underline{u}|^2 + 2p)\,\underline{u}\cdot\underline{\partial}\varphi \le\\
&\le \frac{C}{\rho^2}\int_{Q_\rho} dtd\underline{x}\,|\underline{u}|^2 + \Big|\int_{Q_\rho} dtd\underline{x}\,(|\underline{u}|^2 - \overline{|\underline{u}|^2_\rho})\underline{u}\cdot\underline{\partial}\varphi\Big| +\\
&+ 2\int_{Q_\rho} dtd\underline{x}\,p\,\underline{u}\cdot\underline{\partial}\varphi \le
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{C}{\rho^{1/3}}\Big(\int_{Q_\rho} dtd\underline{x}\,|\underline{u}|^3\Big)^{2/3} + \Big|\int_{Q_\rho} dtd\underline{x}\,\Big(|\underline{u}|^2 - \overline{|\underline{u}|^2_\rho}\Big)\,\underline{u}\cdot\underline{\partial}\varphi\Big| +\\
&+ \frac{2C}{\rho}\int_{B_\rho} dtd\underline{x}\,|p||\underline{u}| \le\\
&\le C\rho G_\rho^{2/3} + C\rho J_\rho + \rho\Big|\frac{1}{\rho}\int_{Q_\rho} dtd\underline{x}\,(|\underline{u}|^2 - \overline{|\underline{u}|^2_\rho})\,\underline{u}\cdot\underline{\partial}\varphi\Big| \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Continuando, a t fisso e con gli integrali su $d\underline{x}$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho}\Big|\int_{B_\rho} d\underline{x}\,(|\underline{u}|^2 - \overline{|\underline{u}|^2_\rho})\underline{u}\cdot\underline{\partial}\varphi\Big| \le \frac{C}{\rho^2}\int_{B_\rho} d\underline{x}\,|\underline{u}|\,\Big||\underline{u}|^2 - \overline{|\underline{u}|^2_\rho}\Big| \le\\
&\le \frac{C}{\rho^2}\Big(\int_{B_\rho} d\underline{x}\,|\underline{u}|^3\Big)^{1/3}\Big(\int_{B_\rho} |\underline{u}^2 - \overline{|\underline{u}|^2_\rho}|^{3/2}\Big)^{2/3}
\end{aligned}
$$

e per (P) con $f = \underline{u}^2$ e $\alpha = 3/2$ (t fisso, integrali su $d\underline{x}$):

$$
\Big(\int_{B_\rho}\Big|\underline{u}^2 - \overline{|\underline{u}|^2_\rho}\Big|^{3/2}\Big)^{2/3} \le C\,\Big(\int_{B_\rho} |\underline{u}||\underset{\sim}{\partial}\underline{u}|\Big)
$$

allora si vede che

allora si vede che

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\rho} \Big| |\underline{u}|^2 - \overline{|\underline{u}|^2_\rho} \Big| \, |\underline{u}| \, |\underset{\sim}{\partial} \underline{\varphi}| \le \frac{C}{\rho} \Big(\int_{B_\rho} |\underline{u}|^3 \Big)^{1/3} \Big(\int_{B_\rho} |\underline{u}| |\underset{\sim}{\partial} \underline{u}| \Big) \le \\
&\le \frac{C}{\rho} \Big(\int_{B_\rho} |\underline{u}|^3 \Big)^{1/3} \Big(\int_{B_\rho} |\underline{u}|^2 \Big)^{1/2} \Big(\int_{B_\rho} |\underset{\sim}{\partial} \underline{u}|^2 \Big)^{1/2} \le \\
&\le \frac{C}{\rho} \rho^{1/2} A_\rho^{1/2} \Big(\int_{B_\rho} |\underline{u}|^3 \Big)^{1/3} \cdot \Big(\int_{B_\rho} |\underset{\sim}{\partial} \underline{u}|^2 \Big)^{1/2} \cdot 1
\end{aligned}$$

Integrando su t e applicando (H) con esponenti $3, 2, 6$,

$$\frac{1}{\rho^2} \int_{Q_\rho} |\underline{u}| \Big| |\underline{u}|^2 - \overline{|\underline{u}|^2_\rho} \Big| \le C A_\rho^{1/2} G_\rho^{1/3} \delta_\rho^{1/2} \le C \, (G_\rho^{2/3} + A_\rho \delta_\rho)$$

e raccogliendo le disuguaglianze si trova per $r = r_n$ e $\rho = r_{n+p}$

$$A_n \le C \, (2^p G_{n+p}^{2/3} + 2^p A_{n+p} \delta_{n+p} + 2^p J_{n+p})$$