Riflessioni su Infinitesimi, Variazioni Serie divergenti e Meccanica in Lagrange

A 18 anni L. è entusiasta degli infinitesimi introduce :

$$[xy]^m \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} [x]^{m-k} [y]^k$$

in cui almeno x o y sono infinitesimi. Analoga al binomio di Newton.

Come il binomio serve per calcolo di potenze negative così se le potenze $\geq 0 \sim$ derivate, o incrementi infinitesimi, e < 0 sono integrali la formula da integrali

Per $m > 0$ intero $\rightarrow$ regola di Leibnitz $[xy]^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} (dx)^{m-k} (dy)^k$

Se $m = -1-k < 0$ allora $[dx]^{-1-k} \rightarrow k+1$ma iterata di integrazione indefinita su un intervallo infinitesimo dx; cioè

$$dx^{-1} = x, dx^{-2} = \frac{x^2}{2dx}, \ldots, [dx]^{-1-k} = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!\, dx^k}$$

Per $m = -1$ es: in notazione odierna $\int y dx$ si calcola

$$[dx\,y]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [dx]^{-1-k} d^k y$$

$$\int y dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{(k+1)! dx^k} d^k y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{(k+1)!} \frac{d^k y}{dx^k}$$

(relazione di “Giovanni Bernoullio”, 1694). Altro esempio

$$[dxdy]^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} [dx]^{-2-k} d^{k+1} y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{(k+2)!} x^{k+2} \frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}}$$

fornisce $\int \int dy\, dx$ che si mostra $\equiv \int y dx$.

Lettera di *Luigi De La Grange*, all’ “Illustrissimo Signor Da Fagnano”, che presto aiuterà L. a pubblicare il suo primo lavoro.

Presto (dopo la teoria delle corde) ne farà uso migliore di Eulero nei fondamenti del calcolo delle variazioni

Corda vibrante

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u, \qquad x \in [0,a],\ u(a) = u(b) = 0$$
$$u(x,t) = \varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)$$

D'Alembert: $\varphi \in \mathscr{C}_2(R)$, $2a$-periodica, dispari intorno a 0 e a

Euler: $\varphi \in \mathscr{C}_2([0,a])$, $2a$-periodic, dispari intorno a 0 e a

Altri (Taylor, D.Bernoulli)

$$u(x) = \sum_n \alpha_n \sin(\frac{2\pi}{2a} nx) \cos(\frac{2\pi}{2a} nct)$$

che secondo Eulero è la stessa di D'Alembert.
Problema: ognuna dedotta a suo modo, *e.g.* di D. Bernoulli dice

L'Auteur déduit cette ingénieuse théorie par une espèce d'induction qu'il tire de la considération des mouvements d'un nombre de corps qui sont supposés former des vibrations régulières et isochrones ...

Lagrange: occorre tornare a principi primi

Nuovo metodo: la corda come collezione di m (enorme) particelle

Il resulte de tout cet exposé que l'Analyse que nous avons proposée dans le Chapitre précédent est peut-être, la seule qui puisse jeter sur ces matières obscures une lumière suffisante à éclaircir les doutes qu'on forme de part et d'autre.

nota che il problema é la diagonalizzazione di una $(m-1)\times(m-1)$ matrice tridiagonale simmetrica.

.. je ne crois pas qu'on ait jamais donné pour cela une formule générale, telle que nous venons de la trouver.

Questa corrisponde alla Lagrangiana

$$\mathscr{L} = \frac{\mu}{2}\delta \sum_{n\delta\in\Lambda_0} \left(\dot{\varphi}^2_{n\delta} - c^2 \sum_{j=1}^{D} (\varphi_{n\delta+e_j\delta} - \varphi_{n\varepsilon})^2 \right)$$

Parentesi: $Z(z)$ deformazione iniziale, $U(x)$ velocità iniziali

$$\varphi^{(\delta)}(\xi,t)=\sum_{h=1}^{m-1}\Big\{\widetilde{A}_h\sqrt{\frac{2}{m}}\sin\frac{\pi h}{a}\xi\cdot\cos\omega_h t+\widetilde{B}_h\sqrt{\frac{2}{m}}\sin\frac{\pi h}{a}\xi\cdot\sin\omega_h t\Big\}$$

è la soluzione

$$\sqrt{\frac{2}{m}}\widetilde{A}_h=\frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m-1}\big(\sin\frac{\pi h}{a}\xi\big)Z(\xi)\xrightarrow[\delta\to 0]{}\frac{2}{a}\int_0^a Z(x)\big(\sin\frac{\pi h}{a}x\big)\,dx$$

$$\sqrt{\frac{2}{m}}\widetilde{B}_h=\text{similar},\qquad \omega_h=c\sqrt{2\frac{1-\cos(\frac{\pi h\delta}{a})}{\delta^2}}\xrightarrow[\delta\to 0]{}\overline{\omega}_h=c\frac{\pi h}{a}$$

formalmente convergente (sotto ipotesi debolissime, *e.g.* $Z,U\in\mathscr{C}_1([0,a])$)

$$u(x,t)=\sum_{h=0}^{\infty}\sin\frac{\pi h}{a}x\Big\{\big(\frac{2}{a}\int_0^a Z(x')\sin\frac{\pi h}{a}x'\,dx'\big)\cos\overline{\omega}(h)t$$
$$+\big(\frac{2}{a}\int_0^a U(x')\sin\frac{\pi h}{a}x'\,dx'\big)\frac{\sin\overline{\omega}(h)t}{\overline{\omega}(h)}\Big\}$$

Alcune critiche di D'A. su affermazioni di L. han risposta *e.g.*

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots = -\frac{1}{2}, \qquad x \neq 2\pi k$$

il ne sera pas hors de propos de démontrer encore la même proposition d'une autre manière. Or

$$\sin \pi m(\frac{x}{a} \pm c\,t) = 0, \qquad \text{come consguenza di } m = \infty$$

Je conviens que je ne me suis pas exprimé assex exactment ..

Oggi un matematico (e fisico) considererebbe non completamente rigora la teoria solo perché gli scambi di limiti per il "passaggio al continuo" non sono neppure menzionati.

Ritorna poi sulla questione studiando il moto solo nell'interno di $[0,a]$: trova di nuovo la soluzione proposta da Eulero senza la condizione $\mathscr{C}_2(R)$: il metodo sarebe oggi chiamato ricerca di una solutione debole.

Mais, dira-t-on, comment peut-il se faire que la somme de la suite infinie $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots$ *soit toujours égale à* $-\frac{1}{2}$ *puisque, dans le cas de* $x = 0$, *elle devient nécessairement égale à une suite d'autant d'unités? Je réponds que ...*

Noi diremmo che la somma è $\delta(x) - \frac{1}{2}$. A D'Alembert aggiunge

Or je demande si, toutes les fois que dans une formule algébrique il se trouvera par exemple une série géométrique infinie, telle que $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$, *on ne sera pas en droit d'y substituer* $\frac{1}{1-x}$ *quoique cette quantité ne soit réellement égale à la somme de la série proposée qu'en supposant le dernier terme* x^∞ *nul. Il me semble qu'on ne saurait contester l'exactitude d'une telle substitution sans renverser les principes les plus communs de l'analyse*

E ancora per D'Alembert

Je réponds qu'avec un pareil raisonnement on soutiendrait aussi que $\frac{1}{1+x}$ n'est point l'expression générale de la somme de la suite infinie $1-x+x^2-x^3+\ldots$ parce que, en faisant $x=1$, on a $1-1+1-1+\ldots$ ce qui est, ou 0, ou 1, selon que le nombre des termes qu'on prend est pair ou impair, tandis que la valeur de $\frac{1}{1+x}$ est $\frac{1}{2}$. Or je ne crois pas qu'aucun Géomètre voulût admettre cette conclusion

D'Alembert non fu mai convinto: le risposte di L. sono però molto interessanti e danno un'idea dei problemi del calcolo pre-Cauchy. Ma L. si trovò d'accordo con Eulero che lo appoggiò con forza:

... vous avoue qu'elles ne me paraissent pas assez fortes pour renverser votre solution. Ce grand génie me semble un peu trop enclin à détruire tout ce qui n'est pas construit par lui-młme.

a proposito di D'A. e poi

Après cette remarque, je vous accorde aisément, monsieur, que pourque le mouvement de la corde soit conforme à la loi de continuité, il faut que, dans la figure initiale, les $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^6y}{dx^6}$, soient égales à 0 aux deux extrémités; mais, quoique ces conditions n'aient pas lieu, je crois pouvoir soutenir que notre solution donnera néanmoins le véri-véritable mouvement de la corde; car ...

L'idea base sulla corda è stata applicata in altri casi: è notevole la Teoria quantistica dei campi. *i.e.* la quantizzazione di

$$\mathscr{L} = \frac{\mu}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\Big(\dot{\varphi}(x)^2 - c^2(\frac{d\varphi}{dx}(x))^2 - (\frac{m_0 c^2}{\hbar})^2\varphi(x)^2 - I(\varphi(x))\Big)\,dx$$

$I(z) = \lambda z^4 + \mu z^2 + \nu$. If $I = 0$ è una corda vibrante con densità μ, tensione $\tau = \mu c^2$ e una forza di richiamo elastica $\mu(\frac{m_0 c^2}{\hbar})^2$.

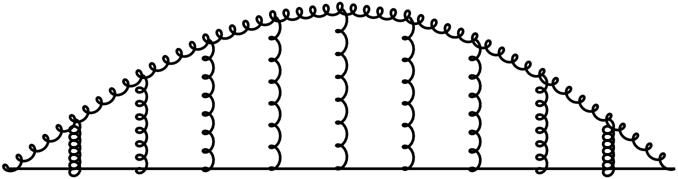


Fig.1

O L

$$\text{“}\,(\mathscr{H}F)(\varphi) = \int_0^L \Big(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\delta^2 F}{\delta\,\varphi(x)^2}(\varphi) + \frac{\mu}{2}\Big(c^2(\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{x}}(\vec{x}))^2 + $$

$$+(\frac{m_0 c^2}{\hbar})^2\varphi(x)^2 + I(\varphi(\vec{x}))\Big)\,F(\varphi)\Big)\,d^D\vec{x}\,\text{”}$$

Come dare significato? come Lagrange; si discretizza

$$\mathscr{L} = \frac{\mu}{2}\delta \sum_{n\delta\in\Lambda_0} \Big(\dot{\varphi}_{n\delta}^2 - c^2 \sum_{j=1}^{D} (\varphi_{n\delta+e_j\delta} - \varphi_{n\varepsilon})^2 - (\frac{m_0 c^2}{\hbar})^2 \varphi_{n\varepsilon}^2 - I(\varphi_{n\varepsilon})\Big)$$

cu corrisponde la Hamiltoniana

$$\mathscr{H}_\delta = -\frac{\hbar^2}{2\mu\delta} \sum_{n\delta\in\Lambda_o} \frac{\partial^2}{\partial\varphi_{n\delta}^2} + \frac{\mu\delta}{2} \sum_{n\delta\in\Lambda_o} \Big(c^2 \frac{(\varphi_{n\delta+e\delta} - \varphi_{n\delta})^2}{\delta^2} + (\frac{m_0 c^2}{\hbar})^2 \varphi_{n\delta}^2 + I(\varphi_{n\delta})\Big)$$

E qui di dovrebbe dire, con Lagrange,

Ces équations, comme il est aisé de le voir, sont en même nombre que les particules dont on cherche les mouvements; c'est pourqoi, le problème étant déjà absolument determiné par leur moyen, on est obligé de s'en tenir là, de sorte que toute condition étrangère ne peut pas manquer de rendre la solution insuffisante et même fautive.

Lo studio di $\mathscr{H}$ via sviluppi in potenze di λ,μ,ν immediatamente portano a *risultati senza senso* già per la stringa φ^4 or la superficie elastica ($d=1,2$)

Nei 1960' φ^4 fu completamente risolto da Nelson, Glimm-Jaffe, Wilson.

Nessuan divergenza s'incontra se si prende sul serio l'Hamiltoniana discretizzata, si calcolano quantità fisicamente rilevanti e si passa al limite continuo , proprio come Lagrange nella sua teoria

Un grande successo della Fisica ottenuto via la teoria perturbativa" si riduce al calcolo di seried di potenze in una successione di parametri $\Lambda_k \stackrel{def}{=} (\lambda_k,\mu_k,\nu_k)$, $k=0,\,1,2,\ldots$, detti *costanti correnti*, legati da

$$\Lambda_k = M\Lambda_{k+1} + B(\{\Lambda_r\}_{r=k+1}^{\infty})$$

ove M è una matrice diagonale con elementi m_1,m_2,m_3. Questaè pensata come una equazione per $(\Lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ della quale occorre una soluzione limitata per $k\to\infty$.

L'equazione è una versione ∞-dimens. di una chiamata da Lagrange equazione letterale: nel caso più semplice

$$\alpha = x - \varphi(x), \quad \longleftrightarrow \quad \psi(x) = \psi(\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \partial_\alpha^{k-1} (\varphi(\alpha)^k \partial_\alpha \psi(\alpha))$$

$\forall\, \psi$: un teorema di L. In particolare per $\psi(\alpha) \equiv \alpha$

$$x(\alpha) = \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \partial_\alpha^{k-1} (\varphi(\alpha)^k), \qquad x(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \partial_\alpha^{k-1} (\varphi(\alpha)^k)\Big|_{\alpha=0}$$

da l'inversa di $x + \varphi(x)$ o, risp., una soluzione di $x = \varphi(x)$. Ampiamente usata in Meccanica Celeste.

La formula ha una rappresentazione grafica che è stata usata in TQC and Fisica delle basse temperature via grafici a forma di alberi θ.

$\frac{1}{k!}\partial_\alpha^{k-1}(\varphi(\alpha)^k) = \sum_\theta \mathrm{Val}(\theta)$

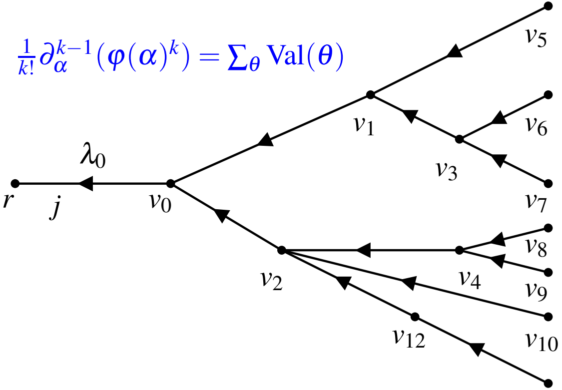


Fig.2

(1) k rami λ orientati verso la "radice" r and

(2) in ogni nodo v entrano k_v rami $\lambda_1 = vv_1, \ldots, \lambda_{k_v} = vv_{k_v}$

(3) ogni nodo porta un indice $j_{v_1}, \ldots, j_{k_{j_v}}$ and

(4) il nodo v simbolizza il tensore $\partial^{k_v}_{x_{j_{v_1}},\ldots x_{j_{v_{k_v}}}} \varphi(x)_{j_v}$

(5) Alberi decorati sono equivalenti per "cerniere"

(6) Il *valore*, $\mathrm{Val}(\theta)$ è definito

$$\mathrm{Val}(\theta) = \prod_{v\in\theta} \left(\frac{1}{k_v!} \partial^{k_v}_{j_{v_1},\dots,j_{v_{k_v}}} \varphi_{j_v}(x) \right)$$

ove tutti gli indici tranne quello $j = j_{v_0}$ associato alla radice appaiono 2 volte e si intendono sommati.

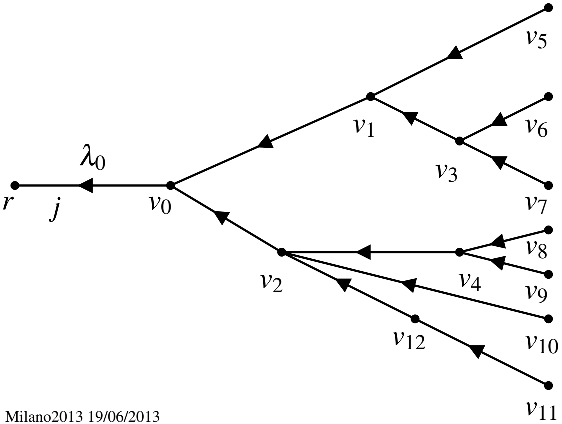


Fig.2

L. formula $\Rightarrow$ risommazione di serie perturbative anche in TQC: subito usata per equazione di Keplero by L. e poi daCarlini (1817), Bessel (1817), Jacobi (1850), Levi-Civita (1909); e KAM theory, *i.e.*

$$\vec{h}(\alpha)+(\omega\cdot\partial)^{-2}\varepsilon\,\partial f(\alpha+\vec{h}(\alpha)) \;=\; \vec{0}, \qquad\qquad \alpha\in T^{\ell}$$

risolta allo stesso modo
scrivendo $\vec{A}=\vec{h}+\mathscr{K}\vec{h}$
e ponendo $\vec{A}=\vec{0}$,

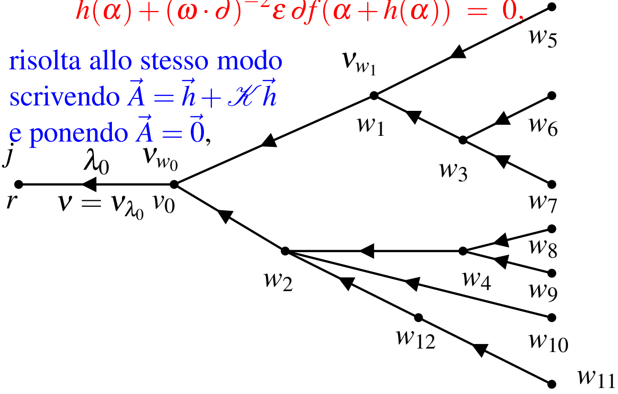


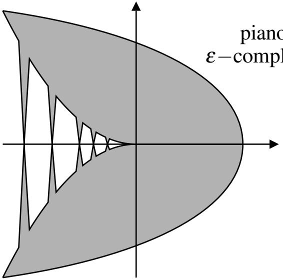
Fig.3

$$\vec{h}^{[k]}_{\nu}=\sum_{\theta}\mathrm{Val}(\theta), \qquad \mathrm{Val}(\theta)=\Big(\prod_{w}\frac{f_{\nu_w}}{k_w!}\Big)\Big(\prod_{\lambda}\frac{\nu_w\cdot\nu_{w'}}{(\omega\cdot\nu(\lambda))^2}\Big)$$

sviluppata prima algebricamente da Lindstedt and Newcomb. KAM diventa $\Rightarrow$ un controllo algebrico in cui la difficoltà dei *piccoli divisori* diventa un problema combinatorio su cancellazioni fra $\mathrm{Val}(\theta)$ enormi ((considerata difficile) MA:

D'ailleurs mes recherches n'ont rien de commun avec le leurs que le problème qui en fait l'object; et c'est toujours contribuer à l'avancement des Mathématiques que de montrer comment on peut résoudre les même questions et parvenir au même resultats par des voies très-différentes; les méthodes se prètent par ce moyen un jour mutuel et en acquièrent souvent un plus grand degré d'évidence et de généralité.

Questo mise in evidenza possibili risommazioni di serie divergenti permettendo in alcuni casi di mostrare analitictà in ε in regioni complesse con 0 sul bordo (e quindi non più serie di potenzein ε ma come in TQC serie di potenze in funzioni che sono singolari in ε a $\varepsilon = 0$. Ad esempio:



punti di contatto < 0
con Lebesgue densità 1 at 0.

O sommabilità di Borel in una
regione con $\varepsilon = 0$ sulla frontiera.

Il *Traité de Mécanique Analytique*: riduce costantemente ogni problema al principio di minima azione nella form di combinazione del principio dei lavori virtuali con il principio di D'Alembert. una fondamentale novità.
Riassume l'esperienza accumulata nello studio di

(1) librazione della Luna, forse la prima applicazione della PT fondata sulla meccanica analitica

(2) corpo rigido, undertaken curiously avoiding starting from the proper axes of rotation; byproduct eigenvalues reality of 3×3 symm. matrix, and (later) integrability of "Lagrange's top" e quadrature di veri sistemi.

(3) variazioni secolar degli elementi planetarii e altri problemi celest (aprendo la strada a Laplace)

(4) Il tarttato riflette la viione atomistica di . In uno dei vari lavori sui fluidi:

Quoique nous ignorions la constitution intérieure des fluides, nous ne pouvons douter que les particules qui les composent ne soient matérielles, et que par cette raison les lois générales de l'équilibre ne leur conviennent comme aux corps solides,

(5) La Mécanique basata sul principio variazionale fu adottata nello sviluppo delle teorie atomistiche: Clausius and Boltzmann ne fanno costante uso impiegando le notazioni di Lagrange. a cominciare dalla regola di commutazione $\delta d = d\delta$ introdotta da L. e divenuta universale. L'uso di due "variazioni" fu di grande importanza perch'e gli consentì di risolvere il problema posto da Eulero

"Desideratur itaque methodus a resolutione geometrica et lineari libéra, qua pateat in tali investigatione maximi minimique, loco Vdp scribi debere $-pdV$*."*

Passando dalle deformazioni infinitesime locali di Eulero a deformazioni globali $\delta(x)$: la novità si apprezza anche perché si trovano affermazioni che ritengono errate alcune deduzioni di L.

(6) Gli Infinitesimi, nel senso di Leibnitz, pervadono il suo lavoro e L. apprese molto presto ($<$1754) ad usarne il formidabile potere. Però arrivò un momento in cui parve accorgersi che qualcosa andave fatto per sistematizzare i fondmenti del calcolo.
Le sue lezioni

Théorie des Fonctions analytiques, contenants les principes du calcul differentiel dégagé de toutes considérations d'infiniment petits ou d'evanouissants, de limites ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique de quantités finies

e la prima pagina delle *Lecons sur le calcul des fonctions*

On connat les difficultés qu'offre la supposition des infiniment petits, sur laquelle Leibnitz a fondé le Calcul diffrentiel. Pour les víter, Euler regarde les diffŕentielles comme nulles, ce qui ŕduit leur rapport à l'expression zéro divis par zéro, laquelle ne prsente aucune idée.

mostrano con chiarezza il suo disagio.

(12) Tuttavia la sua ultima parola sul tema è probabilmnente nella prefazione della seconda edizione della *Mécanique Analytique* ove (con nostro solievo) ammette

On a conservé la notation ordinaire du Calcul différentiel, parce qu'elle répond au système des infiniment petits, adopté dans ce Traité. Lorsqu'on a bien conçu l'esprit de ce système, et qu'on s'est convaincu de l'exactitude de ses résultats par la méthode géométrique des premières et dernières raisons, ou par la méthode analytique des fonctions dérivées, on peut employer les infiniment petits comme un instrument sûr et commode pour abréger et simplifier les démonstrations. C'est ainsi qu'on abrège les démonstrations des Anciens par la méthode des indivisibles.

(13) Una storia della sua vita la si trova nelle "Notices sur la vie et les ouvrages" nella Preface di M. Delambre nel Tome I delle *Oeuvres* e nell'Elogio di P. Cossali alla Università di Padova: utilissimo perché coniuga adulazione Napoleonica verso Eugenio e Napoleone Bonaparte con una dettagliata e accurata esegesi dell'opera di L.