

# Modello gerarchico e effetto Kondo

G.Benfatto, I.Jauslin & GG

1-d lattice, fermions+impurity, “Kondo problem”

$$H_h = \sum_{\alpha=\pm} \left( \sum_{x=-L/2}^{L/2-1} \psi_{\alpha}^{+}(x) \frac{-\Delta - 1}{2} \psi_{\alpha}^{-}(x) + h \psi^{+}(0) \boldsymbol{\sigma} \psi^{-}(x) \cdot \boldsymbol{\varphi}^{+} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varphi}^{-} \right)$$

$$H_K = H_0 + \lambda \sum_{\substack{\alpha, \alpha'=\pm \\ \gamma, \gamma'=\pm}} \sum_{j=1}^3 \psi_{\alpha}^{+}(0) \sigma_{\alpha, \alpha'}^j \psi_{\alpha'}^{-}(0) \boldsymbol{\varphi}_{\gamma}^{+} \boldsymbol{\sigma}_{\gamma, \gamma'}^j \boldsymbol{\varphi}_{\gamma'}^{-} = H_h + V$$

(1)  $\psi_{\alpha}^{\pm}(x), \varphi_{\gamma}^{\pm}$  C&A operators,  $\sigma^j, j = 1, 2, 3$ , Pauli matrices

(2)  $x \in$  unit lattice,  $-L/2, L/2$  identified (periodic b.c.)

(3)  $\Delta f(x) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$  discrete Laplacian.

Per  $\lambda = 0$  impurità e “elettroni” indipendenti: classico

$$m(\beta, h) = 2 \tanh(\beta h), \quad \chi(\beta, h) = 2\beta \frac{1}{\cosh^2 \beta h}, \quad \forall L \geq 1$$

$$\chi(\beta, h) \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \infty \quad \text{for } h = 0, \text{ (e anche se } \beta h < 1)$$

e **quantico**. Interazione (classico) 1 el. e 1 imp.:  $\lambda = -1$

$$m(\beta, h) = 2 \frac{e^{-\beta} \sinh 2\beta h}{e^{-\beta} \cosh 2\beta h + e^{\beta}}$$
$$\chi(\beta, h) = 4\beta \frac{(e^{-2\beta} + \cosh \beta h)}{(e^{-\beta} \cosh 2\beta h + e^{\beta})^2} \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 0$$

(tende a  $+\infty$  nel caso attrattivo,  $\beta \rightarrow -\infty$ ). Motivo: spin antiparalleli.

Questo resta vero se il reticolo è finito,  $L < \infty$  e non cambia nel caso quantico. Se  $L = \infty$  e classico: nulla nuovo.

Se  $L = \infty$  quantico : **teorema di Pauli** (1926)

La suscettività  $\chi(\beta, 0)$  non diverge per  $\beta \rightarrow \infty$

$$m(\beta, h) = L^{-d} \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{\sigma}{1 + e^{\beta(e(\vec{k}) - \mu h \sigma)}}, \quad \text{con } e(k) = \frac{1}{2}k^2 - \mu$$
$$\xrightarrow{L \rightarrow \infty} - \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\sigma=\pm} \sigma \int d^d k \chi(e(k) - e(k_F) - \mu h \sigma \leq 0)$$
$$\chi(\infty, 0) = \rho \frac{1}{k_B T_F} \frac{d}{2}, \quad \text{Pauli's paramagnetism}$$

Se  $L < \infty$  oppure  $\beta/L = O(1)$  la questione è un po' delicata perchè  $k = \frac{2\pi}{L}n$  e il risultato dipende da quanto  $e(k) - \mu$  è vicino a  $\frac{2\pi}{L}n$  ("risonanza densa").

Problema? Nel caso quantico e  $L = \infty$  la  $\chi$  resta finita a  $h = 0, \beta = \infty$ . E allora è ancora vero che in presenza di interazione la suscettività dell'impurità (che divergerebbe senza inter.) resta finita?

La risposta non è facile: la teoria pert. dà contributi divergenti a ogni ordine non banale (però anche nel caso classico). Cosa che suggerirebbe che la  $\chi$  diverga.

Problema “multiscale”. Si imposta calcolo di  $Tr e^{-\beta H_K}$  con integrale funzionale. I campi  $\psi^\pm(0), \varphi^\pm$  hanno nel caso libero propagatore singolare

$$\delta_{\gamma,\gamma'} \delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{m,m'} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{i\sigma k_0(t-t')}}{-i\sigma k_0 + \gamma k_m} \chi\left(2^{-m} \frac{k_0}{2\pi}\right),$$

$$\delta_{m,m'} \delta_{\sigma,\sigma'} \int_0^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{i\sigma k_0(t-t')}}{-i\sigma k_0} \chi\left(2^{-m} \frac{k_0}{2\pi}\right)$$

a  $t - t' = 0$  (sing. UV) e a  $t - t' = \infty$  (sing. IR) che vengono risolte via i regolarizzatori  $\chi$ .

Osservazione chiave: il calcolo della magnetizzazione in funzione di  $h$  sul sito dell' impurità dipende solo dai propagatori dei campi con  $x = 0$ . Via il teorema di Wick solo i valori medi di loro prodotti intervengono.

Allora problema 1-D: Wilson lo trattò senza integrale funz. ma diagonalizzando  $H_K$  (approssimativamente).

Impostandone il calcolo con i metodi “romani” la difficoltà si **manifesta** immediatamente perchè la teoria perturbativa in  $\lambda$  a  $h = 0$  della funzione di partizione

$$\int e^{-H(\psi,\varphi)} d\psi d\varphi$$

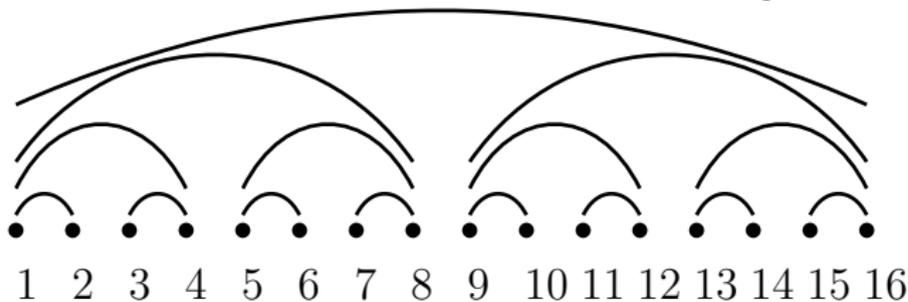
si esprime come serie di potenze in 4 **costanti correnti** ( $\lambda_n = (\lambda_n^1, \lambda_n^2, \lambda_n^3, \lambda_n^4)$ ) definite per  $n = 0, -1, -2\dots$  legate fra loro da una relazione di ricorrenza

$$\lambda_n = \Lambda \lambda_{n+1} + \mathcal{B}(\lambda_{n+1}), \quad \lambda_0 = (-\lambda, 0, 0, 0)$$

e  $\Lambda = (1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2})$ . E  $\mathcal{B}$  e' una serie formale.

Sebbene il problema sia 1-d, la teoria pert. non potrà dare risultati perchè nella  $\mathcal{B}$  (**pur già trascurando questioni di convergenza**) ci sono termini marginali e rilevanti

Per capire cosa fare siamo tornati al “modello gerarchico”.



Organizzazione gerarchica dei siti in  $d=1$   $[1, \dots, 2^N]$ .

I campi di Grassmann  $\psi(t), \varphi(t)$  sono decomposti in somma di campi costanti su ogni scala, ove sono **indipendenti**, e all'interno di una tessera di scala  $2^{-n}$  hanno **propagatore**  $2^{-n/2}$  o  $2^{-n/2}$  ( $g(1, 2) = -g(2, 1)$ ).

$$\psi_{\alpha}^{[\leq m]\pm}(t) = 2^{\frac{m}{2}} \left( z_{\alpha}^{[m]\pm}(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} P_{\alpha}^{[m-1]\pm} \right),$$

$$\varphi_{\beta}^{[\leq m]\pm}(t) = \zeta_{\beta}^{[m]\pm}(t) + \Phi_{\beta}^{[m-1]\pm}$$

$z, \zeta$  sono campi di scala  $m$  mentre  $P$  e  $\Phi$  sono costanti su scala  $m$ . L'Aquila 13/02/2015

Una seconda osservazione chiave è che l'integrale su una data scala  $m$  si può calcolare esattamente (nessun problema con il premio di  $10^6$ €) e che si mantiene ad ogni interazione la forma, in variabili riscalate,

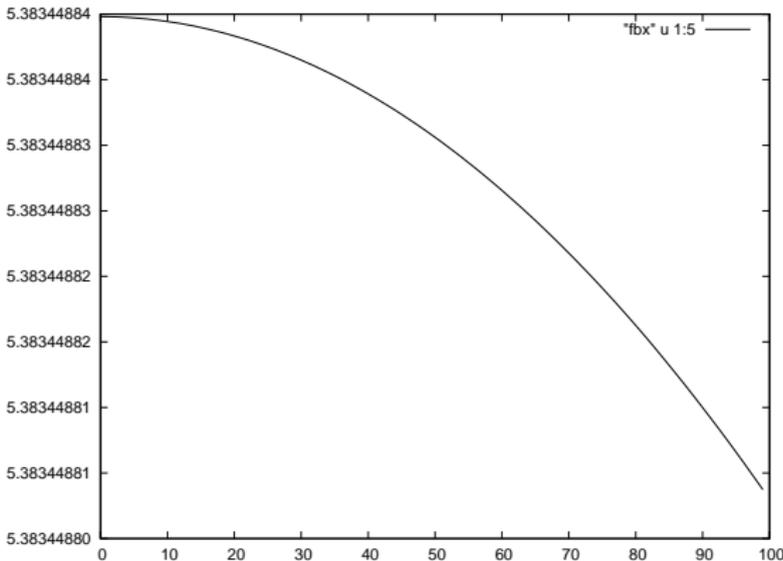
$$V_0 = \frac{1}{2} \left( \lambda_0 (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_2) + \lambda_1 (\mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2) + \lambda_2 (\mathbf{B}_1^2 + \mathbf{B}_2^2) + \lambda_3 (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{B}_1^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{B}_2^2) \right)$$

con  $\mathbf{A}(\mathbf{t}) \stackrel{\text{def}}{=} \psi^+(\mathbf{t}) \boldsymbol{\sigma} \psi^-(\mathbf{t})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{t}) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^+(\mathbf{t}) \boldsymbol{\sigma} \varphi^-(\mathbf{t})$ .

E  $\boldsymbol{\lambda}_n$  si possono calcolare esplicitamente in funzione delle  $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$ .

Ossia il modello è esattamente risolvibile: riducibile a un sistema dinamico. E il risultato è non perturbativo perchè per  $n \rightarrow -\infty$  (limite IR) le  $\boldsymbol{\lambda}_n$  convergono a un punto fisso non banale se  $h = 0$ . L'Aquila 13/02/2015

Per il calcolo della suscettività è necessario introdurre più costanti correnti (8) ma l'equazione di stato si calcola il grafico della  $\chi$  a bassa temperature (ossia  $\beta h < 1$ ) è se  $\lambda_0 = -0.2$  (esempio)



La  $\chi$  limite indep. da  $\beta \rightarrow \infty$ , a  $\lambda_0$  fisso, raggiunge valore asintotico a  $\beta \sim \beta_K \sim 2^{c_1/\lambda_0}$ , diverge se  $\lambda_0 \rightarrow 0$  come  $c_0/\lambda_0$ .

Funzione beta a  $h = 0$  (dopo un conveniente cambio di variabili)

$$\lambda'_0 = \frac{2}{C} \left( \frac{1}{2} \lambda_0 + 9 \lambda_0 \lambda_3 + \frac{3}{2} \lambda_0 \lambda_2 + \frac{3}{2} \lambda_0 \lambda_1 - \lambda_0^2 \right)$$

$$\lambda'_1 = \frac{2}{C} \left( \frac{1}{4} \lambda_1 + \frac{9}{2} \lambda_2 \lambda_3 + \frac{1}{8} \lambda_0^2 \right), \quad \lambda'_2 = \frac{2}{C} \left( \lambda_2 + 18 \lambda_1 \lambda_3 + \frac{1}{2} \lambda_0^2 \right)$$

$$\lambda'_3 = \frac{2}{C} \left( \frac{1}{4} \lambda_3 + \frac{1}{8} \lambda_1 \lambda_2 + \frac{1}{48} \lambda_0^2 \right)$$

$$C = 1 + 3\lambda_0^2 + 9\lambda_1^2 + 9\lambda_2^2 + 324\lambda_3^2$$

richiede calcolo di circa **20 grafici** di Feynman

Invece il calcolo della beta per  $h \neq 0$  richiede il calcolo (per come lo ho fatto) di **52100 grafici** di Feynman

$$\tilde{\lambda}_0 = \frac{1}{2}\lambda_0 - \lambda_0\lambda_6 + 9\lambda_0\lambda_3 + \frac{3}{2}\lambda_0\lambda_2 + \frac{3}{2}\lambda_0\lambda_1 - \lambda_0^2$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{4}\lambda_1 + \frac{9}{2}\lambda_2\lambda_3 + \frac{3}{4}\lambda_8^2 + \frac{1}{24}\lambda_6^2 + \frac{1}{2}\lambda_5\lambda_7 + \frac{1}{48}\lambda_4^2 + \frac{1}{2}\lambda_0\lambda_6 + \frac{1}{8}\lambda_0^2$$

$$\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2 + 18\lambda_1\lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_0^2 + 3\lambda_7^2 + \frac{1}{6}\lambda_6^2 + \frac{1}{12}\lambda_5^2 + \lambda_4\lambda_8 + \frac{1}{3}\lambda_0\lambda_6$$

$$\tilde{\lambda}_3 = \frac{1}{4}\lambda_3 + \frac{1}{8}\lambda_1\lambda_2 + \frac{1}{24}\lambda_0^2 + \frac{1}{72}\lambda_0\lambda_6 + \frac{1}{144}\lambda_6^2 + 6\lambda_5\lambda_7 + \frac{1}{24}\lambda_4\lambda_8$$

$$\tilde{\lambda}_4 = \frac{1}{2}\lambda_4 + 3\lambda_6\lambda_7 + \frac{1}{2}\lambda_5\lambda_6 + 54\lambda_3\lambda_8 + 9\lambda_2\lambda_8 + \frac{3}{2}\lambda_1\lambda_4$$

$$\begin{aligned} &+ 3\lambda_0\lambda_7 + \frac{1}{2}\lambda_0\lambda_5 \\ \tilde{\lambda}_5 = &\lambda_5 + 6\lambda_6\lambda_8 + \lambda_4\lambda_6 + 108\lambda_3\lambda_7 + 3\lambda_2\lambda_5 + 18\lambda_1\lambda_7 \\ &+ 6\lambda_0\lambda_8 + \lambda_0\lambda_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_6 = &\frac{1}{2}\lambda_6 + 9\lambda_7\lambda_8 + \frac{3}{2}\lambda_5\lambda_8 + \frac{3}{2}\lambda_4\lambda_7 + \frac{1}{4}\lambda_4\lambda_5 + 9\lambda_3\lambda_6 \\ &+ \frac{3}{2}\lambda_2\lambda_6 + \frac{3}{2}\lambda_1\lambda_6 + \lambda_0\lambda_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_7 &= \frac{1}{4}\lambda_7 + \frac{1}{4}\lambda_6\lambda_8 + \frac{1}{24}\lambda_4\lambda_6 + \frac{3}{4}\lambda_3\lambda_5 + \frac{3}{4}\lambda_2\lambda_7 \\ &\quad + \frac{1}{8}\lambda_1\lambda_5 + \frac{1}{4}\lambda_0\lambda_8 + \frac{1}{24}\lambda_0\lambda_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_8 &= \frac{1}{2}\lambda_8 + \frac{1}{2}\lambda_6\lambda_7 + \frac{1}{12}\lambda_5\lambda_6 + \frac{3}{2}\lambda_3\lambda_4 + \frac{1}{4}\lambda_2\lambda_4 + \frac{3}{2}\lambda_1\lambda_8 \\ &\quad + \frac{1}{2}\lambda_0\lambda_7 + \frac{1}{12}\lambda_0\lambda_5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= 1 + 2\lambda_0^2 + (\lambda_0 + \lambda_6)^2 + 9\lambda_1^2 + 9\lambda_2^2 + 324\lambda_3^2 + \frac{1}{2}\lambda_4^2 + \frac{1}{2}\lambda_5^2 \\ &\quad + 18\lambda_7^2 + 18\lambda_8^2\end{aligned}$$

quindi se  $(\Lambda_j)_{j=0}^8 \stackrel{def}{=} (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ , la  $\mathcal{B}$  linearizzata è  $\lambda'_j = 2\Lambda_j\tilde{\lambda}_j$ ,  $j = 0, \dots, 8$  con  $\lambda_0, \lambda_5, \lambda_8$  *marginali*,  $\lambda_2, \lambda_5$  *rilevanti*,  $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_7$  *irrilevanti*. *Molto diversa* dalla vera

$$\lambda'_j = \frac{2}{C}\tilde{\lambda}_j = \mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda})_j, \quad j = 0, \dots, 8$$