

Irreversibilità, attrito e fluttuazioni

Personne n'ignore que la chaleur peut être la cause du mouvement, qu'elle possède même une grande puissance motrice: les machines à vapeur, aujourd'hui si répandues, en sont une preuve parlant à tous les yeux.

Così inizia S. Carnot (1824): nel trattato appaiono, con ruolo essenziale, le **trasformazioni reversibili**: sono trasformazioni in cui uno stato di equilibrio varia in una successione “*infinitamente lenta*”. [1].

Carnot, ben conscio dell'ossimoro: “*À la vérité, les choses ne peuvent pas se passer rigoureusement comme nous l'avons supposé ...*”, [1, p.13-14], procede alla dimostrazione di un valore *universale*, ossia indipendente dalla particolare macchina, che fornisce una stima superiore al rendimento di una macchina termica funzionante fra due temperature e mostra che tale valore è **raggiunto nelle macchine reversibili**.

Trascorrono 26 anni, poco dopo l'identificazione (1856), [2], fra temperatura assoluta e energia cinetica media per grado di libertà di *una o più* molecole (*e.g.* un *gruppo di molecole* (gas) contenute in un volume), e **Clausius** deduce, [3], dal teorema di Carnot l'esistenza, per gli stati di equilibrio termodinamico della **entropia**.

“I propose to name the quantity S the entropy of the system, after the Greek word ἡ τροπή “the transformation”. I have deliberately chosen the word entropy to be as similar as possible to the word energy: the two quantities to be named by these words are so closely related in physical significance that a certain similarity in their names appears to be appropriate.’, [4, p.390]

Immediatamente l'entropia diventa una grandezza di importanza teorica e applicativa, e la sua esistenza costituisce l'essenza del II° principio della termodinamica.

Per definirla operativamente per uno stato di equilibrio \mathbf{E} **qualsivoglia** la si definisce $\mathbf{S}(\mathbf{E}_0) = 0$ per un prefissato stato \mathbf{E}_0 e si genera una trasformazione reversibile che lo trasforma in \mathbf{E} sommando, durante la trasformazione (**infinitamente lenta !**), le quantità di calore Q via via assorbite divise per la temper. rispettiva T ottenendo $\mathbf{S}(\mathbf{E})$.

Boltzmann (1866) pone la questione dell'**interpretazione meccanica** dell'entropia.

Propone, arditamente, di immaginare che il moto atomico, (**ad es. di 10^{19} atomi di un gas !**), sia **periodico** e mostra come l'esistenza dell'entropia sia identificabile con il "**principio di minima azione**", fondamento della meccanica.

Seguito da **Clausius** (4 anni dopo), [5], e da **Maxwell**, che aveva già studiato (1860), [6], le proprietà dei gas e dedotto varie proprietà macroscopiche dal modello atomico, fra le quali le equazioni per i fluidi macroscopici di (Navier-Stokes) e studiato la genesi dell'**attrito macroscopico**.

A questo punto però si deve ricordare che le equazioni microscopiche newtoniane **sono reversibili**, ossia cambiando **simultaneamente** il segno di **tutte** le velocità un sistema **ripercorre esattamente** la traiettoria assumendo le posizioni pregresse ma con le velocità opposte.

Si rivelano moti certamente mai osservati (*e.g.* ricomporsi, risalendo sul tavolo, della tazzina infranta al suolo).

Quindi: come si concilia la **reversibilità microscopica** con la irreversibilità **generata dalla stessa dinamica microscopica** ?

Esempio paradigmatico: il moto di un fluido incompressibile viscoso in un contenitore isolato e perfetto.

Nasce l'idea che, essendo la simmetria per inversione temporale \mathbf{T} una simmetria fondamentale, debba essere possibile descrivere almeno gli stati stazionari del fluido in modo equivalente ma attraverso equazioni reversibili e considerare quindi la costante di viscosità come un dato empirico conveniente ma non fondamentale., [7, 8]

Nei recenti studi sulla termodinamica, per sistemi descritti da equazioni microscopiche, solitamente via simulazioni ma anche, non di rado, in studi applicati (e.g. su polimeri) sono impiegate nuove equazioni del moto in cui la dissipazione macroscopica è generata da equazioni microscopiche reversibili.

In altre parole *non c'è incompatibilità fra reversibilità* delle equazioni fondamentali e *irreversibilità* a livello macroscopico.

E allora dovrebbe essere possibile *pur rimanendo* a una descrizione macroscopica descrivere lo stesso sistema *via equazioni reversibili o irreversibili*, a scelta.

Un esempio naturale viene ottenuto sostituendo la *costante empirica* di viscosità ν con una funzione $\nu(\vec{u})$ determinata in modo da *mantenere costante la vorticità del fluido*, [9, 10, 11].

Allora la $\nu(\vec{u})$ evolve in modo *molto caotico* (almeno se il moto è turbolento) in modo da influire su osservabili “*di grande scala*” (*e.g.* descritte da osservabili che sono funzioni molto regolari del campo di velocità del fluido), *come se fosse uguale al suo valore medio*.

$\nu(\vec{u})$ si potrebbe chiamare *viscosità reversibile* o *fluttuante*.

Caso di fluido 2-dimensionale:

$$\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}}^N \frac{(\mathbf{k}_1^\perp \cdot \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_2^2 - \mathbf{k}_1^2)}{2|\mathbf{k}_1| |\mathbf{k}_2| |\mathbf{k}|} \mathbf{u}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{u}_{\mathbf{k}_2} - \nu(\mathbf{u}) \mathbf{k}^2 \mathbf{u}_{\mathbf{k}} + \mathbf{f}_{\mathbf{k}}$$

$|\mathbf{k}|, |\mathbf{k}_i| \leq N$ ($N = \infty$?).

$\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k}^2 |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2 =$ vorticità

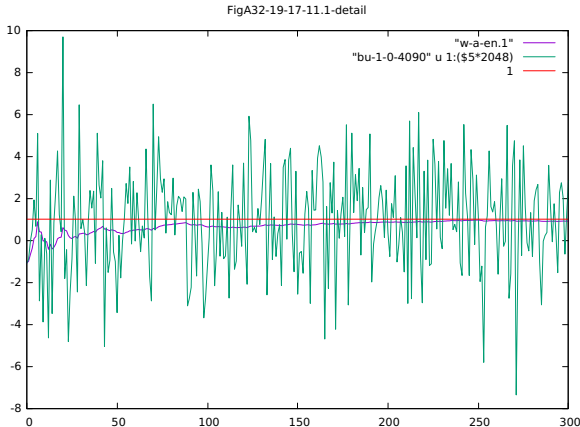
$$\nu(\mathbf{u}) = = \frac{\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k}^2 f_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}}{\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k}^4 |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2}$$

Questo significa che le distribuzioni di probabilità che descrivono gli stati stazionari tramite le due equazioni **coincidono** se ci si limita a considerare osservabili di grande scala purchè la vorticità sia fissata uguale al valore medio che assume nella descrizione fenomenologica irreversibile.

Come esempio adduco un risultato, *scelto fra vari*, in cui si controlla in una simulazione quanto ora detto.

Fissando, in NS, la viscosità ν e **calcolando** il valore medio E della vorticità a mezzo della equazione classica viscosa (NS) si **dovrebbe trovare** che il valore medio della viscosità fluttuante $\nu(\vec{u})$ sia proprio ν :

$$\frac{\langle \nu(\vec{u}) \rangle}{\nu} = 1$$



FigA32-19-17-11.1-detail

Fig.1-dettaglio: Media corrente dell'attrito reversibile

$R\nu(u) \equiv R \frac{2\text{Re}(f_{-\mathbf{k}_0} u_{\mathbf{k}_0}) \mathbf{k}_0^2}{\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k}^4 |u_{\mathbf{k}}|^2}$, sovrapposto al valore 1 congetturato e ai valori fluttuanti di $R\alpha(u)$. Transiente iniziale chiaro.

Evoluzione NS_{rev} , $R=2048$, 224 modes, $\text{Lyap.} \simeq 2$, x-unità 2^{19}

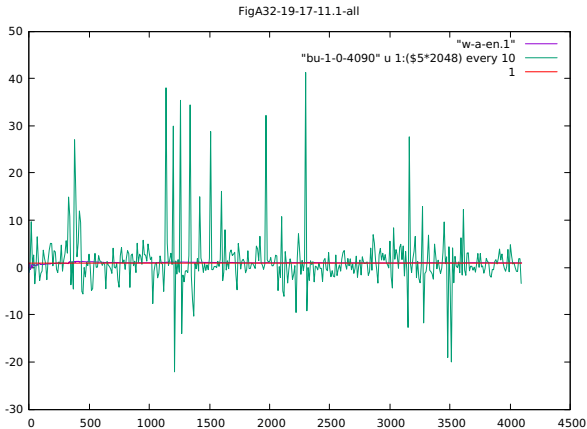


Fig.1: Come precedente ma **su tempo 10 volte più lungo**: per evitare “macchie” dati riportati “ogni 10”.

La **proposta** qui esposta dovrà essere controllata in molti casi: ma è suggestiva per l'**analogia con un'altra ben nota equivalenza e ben stabilita (fin da Boltzmann)**.

Quella fra la **distribuzione canonica** di equilibrio di temperatura T e la **distribuzione microcanonica** di energia E , [12, 13].

Le osservabili di piccola scala hanno la **stessa distribuzione** purché il **valore medio dell'energia totale** (fluttuante nel canonico) sia uguale alla **corrispondente energia fissa** nel microcanonico.

In NS la **viscosità è analoga alla temperatura** e la **vorticità alla energia microcanonica**.

Riferimenti

- [1] S. Carnot.
Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance.
Online in <https://gallica.bnf.fr>; original Bachelier, 1824; reprinted Gabay, 1990., Paris, 1824.
- [2] A. Krönig.
Grundzüge einer Theorie der Gase.
Annalen der Physik und Chemie, XCIX:315–322, 1856.
- [3] R. Clausius.
On the motive power of heat, and on the laws which can be deduced from it for the theory of heat.
Philosophical Magazine, 2:1–102, 1851.
- [4] R. Clausius.
Über einige für Anwendung bequeme formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie.
Annalen der Physik und Chemie, 125:353–401, 1865.
- [5] R. Clausius.
Ueber die Zurückführung des zweites Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie und allgemeine mechanische Prinzipien.
Annalen der Physik, 142:433–461, 1871.
- [6] J.C. Maxwell.
Illustrations of the dynamical theory of gases.
In: The Scientific Papers of J.C. Maxwell, Cambridge University Press, Ed. W.D. Niven, Vol.1, pages 377–409, 1860.
- [7] G. Gallavotti.
Dynamical ensembles equivalence in fluid mechanics.
Physica D, 105:163–184, 1997.
- [8] G. Gallavotti.
Nonequilibrium and irreversibility.

- [9] G. Gallavotti.
Finite thermostats in classical and quantum nonequilibrium.
European Physics Journal Special Topics, 227:217–229, 2018.
- [10] L. Biferale, M. Cencini, M. DePietro, G. Gallavotti, and V. Lucarini.
Equivalence of non-equilibrium ensembles in turbulence models.
Physical Review E, 98:012201, 2018.
- [11] G. Gallavotti.
Navier-stokes equation: irreversibility turbulence and ensembles equivalence.
arXiv:1902.09610, 1902:09160, 2019.
- [12] D. Ruelle.
Statistical Mechanics.
Benjamin, New York, 1969, 1974.
- [13] G. Gallavotti.
Statistical Mechanics. A short treatise.
Springer Verlag, Berlin, 2000.

Anche: <http://arxiv.org> & <http://ipparco.roma1.infn.it>

$$\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}}^N \frac{(\mathbf{k}_1^\perp \cdot \mathbf{k}_2)(k_2^2 - k_1^2)}{2|\mathbf{k}_1| |\mathbf{k}_2| |\mathbf{k}|} \mathbf{u}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{u}_{\mathbf{k}_2} - \nu(\mathbf{u}) \mathbf{k}^2 \mathbf{u}_{\mathbf{k}} + f_{\mathbf{k}}$$

N corrisponde al **volume** V nella Mecc. Stat

ν corrisponde alla temperatura nella Mec. Stat. **canonica**

$\nu(\mathbf{u})$ invece corrisponde alla **energia cinetica** fluttuante
nella distr. microcanonica

$\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k}^2 |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2 =$ vorticità corrisponde all'**energia**
microcanonica