

Navier-Stokes: **alternative alla viscosità**

Fluido incomprimibile in stato stazionario, in contenitore di lato $L = 2\pi$, periodico, soggetto a forza f agente su **“grande scala”**, ossia scala L .

La teoria di NS stazionaria dovrebbe **almeno** prevedere le media di osservabili $O(u)$ dipendenti da u via le componenti di Fourier $u_{\mathbf{k}}$, con $|\mathbf{k}| < c \ell_K^{-1}$, **for some $c = O(1)$.**

Notazioni: velocità $u(\mathbf{x})$ e forza $f(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \neq 0, c=1,2} u_{\mathbf{k}}^c i \mathbf{e}^c(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \in [-\pi, \pi]^3$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{0 < |\mathbf{k}| \leq k_{\max}} f_{\mathbf{k}}^c i \mathbf{e}^c(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

1) $\|\mathbf{e}^c(\mathbf{k})\| = 1$, 'base di elicità' $\perp \mathbf{k}$ ($\forall \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^3$),

$$\mathbf{e}^1(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}^2(\mathbf{k}) = 0 \text{ e } \mathbf{e}^c(\mathbf{k}) = -\mathbf{e}^c(-\mathbf{k}),$$

2) $\bar{u}_{\mathbf{k}}^c = u_{-\mathbf{k}}^c$, $f_{\mathbf{k}}^c = f_{-\mathbf{k}}^c$ complex scalars.

3) $|\mathbf{k}| \leq k_{\max}$ indica **forzante solo su grande scala**.

4) \mathbf{f} è fissato una volta per tutte, e con $\|\mathbf{f}\| = 1$.

Quindi parametro unico: viscosità $\nu = \frac{1}{R}$

Equazioni di Navier-Stokes:

$$\dot{u}_{\mathbf{k}}^c = - \sum_{\substack{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k} \\ a, b = 1, 2}} T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}}^{a, b, c} u_{\mathbf{k}_1}^a u_{\mathbf{k}_2}^b - \nu \mathbf{k}^2 u_{\mathbf{k}}^c + f_{\mathbf{k}}^c$$

ove $T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}}^{a, b, c} \stackrel{def}{=} (e^a(\mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{k}_2)(e^b(\mathbf{k}_2) \cdot e^c(\mathbf{k}))$.

ν è il solo parametro di controllo

$O(\mathbf{u})$ è “Osservabile di grande scala” se dipende da **numero finito di armoniche di \mathbf{u}** , si dirà:

“OSSERVABILE LOCALE”

Se NS è considerata fondamentale, dovrebbe predire proprietà delle medie di **tutte le osservabili locali**, e non solo di quelle di scala $> \ell_K$.

Difficoltà inevitabile: ignoto se ci sia soluzione a NS, $t \rightarrow S_t \mathbf{u}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}_t$, da \mathbf{u}_0 iniziale regolare: *i.e.* ossia non noto un algoritmo per \mathbf{u}_t , per ν generale, [1].

Ricerca verte XLO+ su NS regolarizzate: *i.e.* modificate cosicché a priori $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ evolva rimanendo regolare e ammetta un algoritmo costruttivo per $(S_t \mathbf{u})(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_t(\mathbf{x})$

Esempio di regolarizzazione:

Porre $\equiv 0$ le u_k^c per $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ e $\max |k_i| \leq N$

Questa EDO, denotata INS^N (NS Irreversibile), a $D_N = 2((2N + 1)^3 - 1)$ -dimensioni, solo ν -dipendente

Proprietà generale di EDO generanti “moti caotici”, come INS^N : genericamente ammettono un’unica **distribuzione-SRB** $\mu_{\mathcal{V}}^N$.

Definizione: SRB \equiv con prob. 1 è la statistica dei dati iniziali presi a caso con una densità continua.

Ossia (Ruelle), **a parte di un insieme di dati iniz. u di volume zero le medie di tutti gli osservabili O si ottengono per integrazione $\langle O \rangle = \mu_{\mathcal{V}}^N(O)$.**

Risponde a **“quale è la distrib. di probab. rilevante per le medie?”** fra le innumerevoli prob. stazionarie?: $\mu_{\mathcal{V}}^N$. [2, 3, 4]

Ma il problema di base **non è sparito**: a parte che μ_V^N **non è nota**, l'interesse, considerando NS come fondamentale, rimane interamente fondato sul limite per $N \rightarrow \infty$ delle medie delle osserv. locali.

Un aiuto lo fornisce la Meccanica statistica (MS).

Le eq. (Hamiltoniane) per rV **sfere dure (ad es.)** in un volume V possono essere viste come EDO regolarizzanti il moto di un gas infinito di densità r per cui però non è nota "esistenza-unicità" .

Ciononostante MS si è molto ben sviluppata in sua assenza sulla base delle equazioni a V finito.

L'**ipotesi ergodica** permette di identificare la **distribuzione microcanonica** μ_E^V come la **distribuzione SRB** per la evoluzione caotica descritta a **volume finito** dalla EDO Hamiltoniana.

Così in MS il valor medio di un'osservabile

LOCALE $O(p, q)$ è $\langle O \rangle_E^V \equiv \mu_E^V(O)$

Locale significa che al variare di V il valore di $O(u)$ **dipende solo dalle posizioni-velocità di particelle** **locate in una regione finita indipendente da V , [5].**

In MS è dimostrato (in vari modelli) che $\lim_{V \rightarrow \infty} \mu_E^V(O) = \langle O \rangle_E$ esiste $\forall O$ “locali”: “limite termodinamico”, [5, 6].

L'insieme delle distribuzioni μ_E^V al variare di E costituisce l'insieme microcanonico

Analogia nei fluidi

Unif. distr. su superficie energia \longleftrightarrow distribuzione SRB. In INS^N (caotica) la SRB statistiche stazionarie.

N in INS^N prende il ruolo del volume V finito in MS; e in entrambi i casi si studiano speciali classi di osservabili: *i.e.* gli osservabili locali.

Per analogia: “ensemble” di viscosità \equiv collezione, al variare di $\nu > 0$, delle SRB μ_ν^N per IINS^N.

Per ogni $\nu > 0$ la distr. μ_ν^N determina la media $\mu_\nu^N(O) = \langle O \rangle_\nu^N$ di qualunque O locale su $S_t u$ con u a caso nello spazio delle fasi D_N -dimensionale.

Corrispondentemente in MS la distrib. microcanonica $\mu_E^V(dp dq)$, per particelle di energia totale E racchiuse in un volume V , assegna la media $\mu_E^V(O) = \langle O \rangle_E^V$ a ogni osserv. locale.

Ma in MS esistono altri ensembles!

Naturale domanda: **possibile ??** definire **altre collezioni** \mathcal{E}^N di distribuzioni stazionarie λ_γ^N , dipendenti da un parametro γ , che assegnino medie $\langle O \rangle_\gamma^N =$ alle osservabili locali in modo che una **corrispondenza** $\nu \leftrightarrow \gamma$ possa essere stabilita nella forma $\gamma = g_N(\nu)$ che implichi:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_\nu^N(\mathbf{O}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_\gamma^N(\mathbf{O}) \quad \text{if} \quad \gamma = g_N(\nu)$$

In tal caso si dirà che gli insiemi $\mathcal{E}_{viscosity}^N$ e \mathcal{E}^N sono *equivalenti* nel limite $N \rightarrow \infty$.

Proprio come la distr. microcanonica μ_E^V è **equivalente** alla canonica λ_β^V , nel limite $V \rightarrow \infty$ purché β e E siano opportunamente collegati. [7].

La viscosità è una 'media' su moti microscopici caotici: quindi è concepibile che possa essere sostituita da un'altra forza soggetta a rapide fluttuazioni con media ν , mentre proprietà medie che si osserv. su larga scala (ossia per le oss. locali) siano trascurabilmente modificate.

Descrizione dello stesso sistema con equazioni diverse, ma equivalenti (in opportuni limiti) almeno su vaste classi di osserv. è familiare in MS: ad es. l'equiv. microcanonico \longleftrightarrow isocinetico.

Vasta letteratura su simulazioni on nonequilibrium, [8, 9, 10] fornisce esempi.

Equazioni diverse per uno stesso sistema sono di solito ottenute sostituendo forze agenti con nuove forze tali da rendere un osservabile (o più) selezionato (e tipic. non locale) cost. del moto.

Forze modificate: interpretate simulare azione di “termostati”: per sistemi di particelle c.f.r. [11, 12].

È anche possibile imporre simultan. più forze extra: notevolissimo è in [13] che concerne le eq. NS.

Scelta degli osserv. che, nelle equ. modificate, restano costanti è sempre su quantità per cui si **prevedono piccole fluttuazioni** nei limiti interessanti (*e.g.* MS: energia cinetica tot. se $V \rightarrow \infty$).

Tornando alle NS eq.

$$\dot{u}_{\mathbf{k}}^c = - \sum_{\substack{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k} \\ a, b = 1, 2}} T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}}^{a, b, c} u_{\mathbf{k}_1}^a u_{\mathbf{k}_2}^b - \nu \mathbf{k}^2 u_{\mathbf{k}}^c + f_{\mathbf{k}}^c \quad (\#)$$

Si propone, [14, 15, 16], di rappresentare la viscosità sostituendo ν con un moltiplicatore α tale che l'evoluz. mantenga costante la “enstrofia”

$\mathcal{D}(\mathbf{u}) \stackrel{def}{=} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k}^2 u_{\mathbf{k}}^2$. Ciò si ottiene con:

$$\alpha(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{\mathbf{c}} \sum_{\mathbf{k}} (-t_{\mathbf{k}}^{\mathbf{c}}(\mathbf{u}) \mathbf{k}^2 \bar{u}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{c}} + \mathbf{k}^2 f_{\mathbf{k}}^{\mathbf{c}} \bar{u}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{c}})}{\sum_{\mathbf{c}} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k}^4 |u_{\mathbf{k}}^{\mathbf{c}}|^2} \quad (* : \mathbf{RNS}^{\mathbf{N}})$$

ove $t_{\mathbf{k}}^{\mathbf{c}}(\mathbf{u})$ abbrevia il termine non lineare della NS

La \mathbf{R} in the name \mathbf{RNS} stands to stress that the equation $\mathbf{RNS}^{\mathbf{N}}$ is time reversible, unlike the irreversible $\mathbf{INS}^{\mathbf{N}}$.

Interpr.: In un **fluido incompressibile**, calore deve essere asportato per **mantenere pressione e temperatura a densità costante come prescritto dall'eq. di stato**.

Le distrib. stazionarie per RNS^N , con α in (*), sono parametrizz. dal valore dell'**enstrofia** D e sono denotate λ_D^N ; la loro collezione sarà l'**“ensemble enstrofico”**, $\mathcal{E}_{enstrofia}^N$.

Data viscosità ν supponiamo, x semplicità, che ci sia una sola distr. SRB $\mu_\nu^N \in \mathcal{E}_{viscosity}^N$, per N grande:

Conggettura di Equivalenza:

Sia $D = \mu_{\mathcal{V}}^N(\mathcal{D})$ la enstrofia media. Allora anche la distrib. $\lambda_D^N \in \mathcal{E}_{enstrofia}^N$ è unica. Le distribuzioni $\mu_{\mathcal{V}}^N, \lambda_D^N$ sono **equivalenti** nel senso:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{V}}^N(O) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_D^N(O) \quad (@)$$

per tutti gli osserv. **locali** O .

In altre parole: l'ensemble di viscosità è equivalente all'ensemble di enstrofia nel limite $N \rightarrow \infty$ **se le loro enstrofie sono uguali**, (se la distr. stazion. è 1-ca).

Più in generale la cong. si interpreta dire che le distribuzioni SRB per INS^N e RNS^N con la stessa enstrofia possono esser poste in corrispondenza 1-1 **in modo che si abbia equiv. fra distr corrispondenti**.

Una prima verifica **è una conseguenza non banale**: se ambo i membri di INS^N o RNS^N sono rispett. moltiplicati per \bar{u}_k^c e sommati su c, k si ha:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\mathbf{u}) = -\nu\mathcal{D}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}, \quad \frac{d}{dt}\mathcal{E}(\mathbf{u}) = -\alpha(\mathbf{u})D + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$$

(nessun termine non-lineare ! (cancellazione)).

Ma la condizione di equivalenza è $\langle \mathcal{D} \rangle_{\nu}^N = D$ e inoltre $O = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$ è **osserv. locale** : quindi le medie $\langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \rangle$ **devono essere uguali** per $N \rightarrow \infty$; pertanto:

$$\nu = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \alpha \rangle_D^N$$

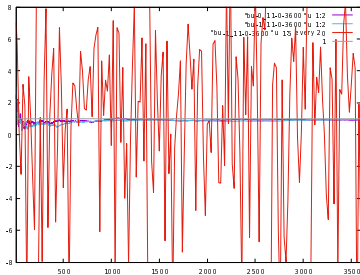
[perché le medie di $\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\mathbf{u})$ devono essere nulle].

In un termostato in cui e' tenuta costante l'energia invece che l'entropia, che chiamo **ENS^N**, controlli rilevanti sono proposti in [17].

Commenti

(1) La verifica di equivalenza: $\langle \alpha \rangle_D^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \nu$ è eseguita in 2D and 3D: con risultati positivi in tutti i casi pubblicati: see Fig.4 in [14] and Fig.1 in [18], Fig.4 in [19], Fig.15a in [16].

(2) altro è illustrato via alcuni risultati che seguono



$$\frac{\alpha(t)}{\nu}, \text{ and } \frac{\langle \alpha \rangle_0^t}{\nu}$$

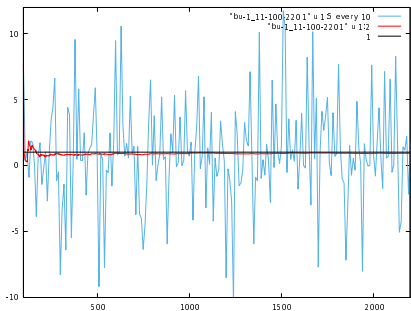
Fig.4 [14] 2D: $R = 2048, N = 15, 960$ modes, $h = 2^{-17}$

1) Le grandi fluttuazioni sono valori in RNS^N di $\frac{\alpha(t)}{\nu}$, rosso

2) la loro **media corrente** (*i.e.* la media

$\frac{1}{t} \int_0^t \frac{\alpha(t')}{\nu} dt' = \frac{\langle \alpha \rangle_0^t}{\nu}$ è la **linea rossa** rapidamente
 “convergente” a 1.

3) La **linea blu**, anche convergente a 1, è la media corrente irreversibile in INS^N dell’osservabile $\frac{\alpha(\mathbf{u}(t))}{\nu}$



$$\frac{\alpha(t)}{\nu}$$

$$\frac{\langle \alpha \rangle_0^t}{\nu}$$

Fig.1 in [18] 2D: $h = 2^{-14}$, $R = 2048$, $N = 31$, e 3968 modi: stesso significato della fig. precedente.

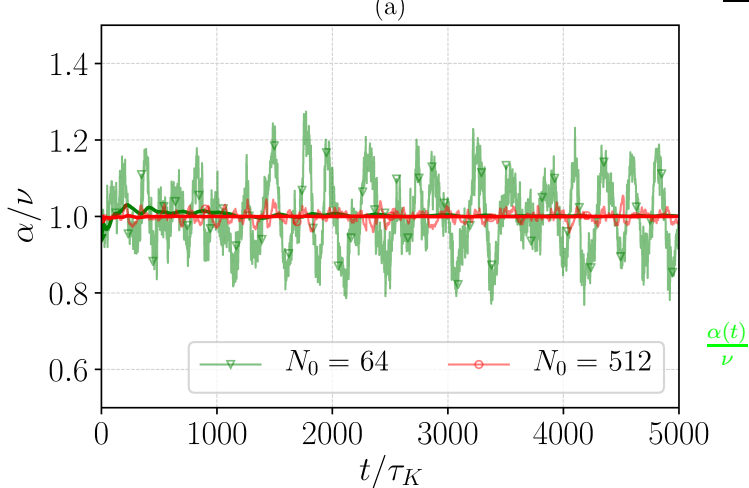


Fig.15a in [16] 3D $\frac{\alpha(t)}{\nu}$, media corrente $\langle \frac{\alpha}{\nu} \rangle_0^t$ and

?? $\alpha > 0$??;

$N = 21$ (ossia $41^3 \sim 68900$ modi) verde,

$N = 170$ (ossia $341^3 \sim 39 \cdot 10^6$ modi) rosso.

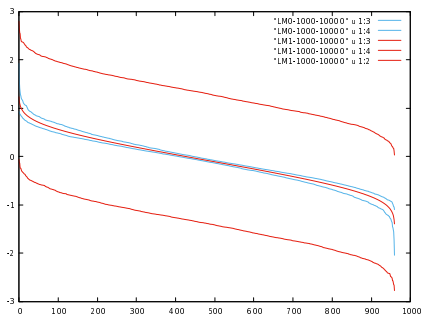


Fig.6 in [14] spettro della matrice di linearizzazione (jacobiana simmetrizzata) $\frac{\partial u_k^c}{u_k^r}$ in 960 modes ($31 \times 31m$ $N = 15$): $\lambda_k(t)$, $k = 0, \dots, 959$
rosso= $\max_t, \min_t \lambda_k(t)$ in RNS
verde= \max_t, \min_t in INS,
media temporale in BOTH cases= central red $\bar{\lambda}_k$.

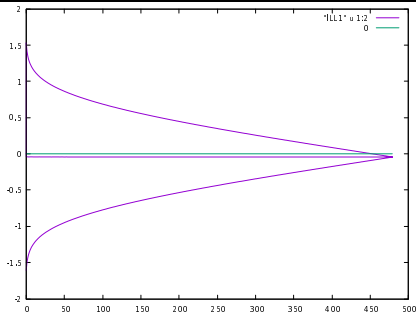
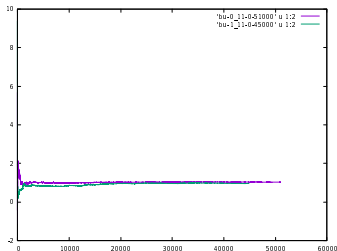


Fig.7 [18] Regola di accoppiamento (?) dello spettro locale $\bar{\lambda}_k$

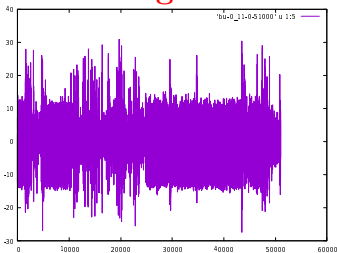
RNS & INS sovrapposti: $R = 2048$, $h = 2^{-13}$, $N = 15$,
960 modes,

la prima metà dei $2d$ autovalori $\bar{\lambda}_k$ riportata in
ordine decrescente mentre la seconda metà in
ordine crescente : **~Pairing** ? $\frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_{2*d-k}) \simeq const$



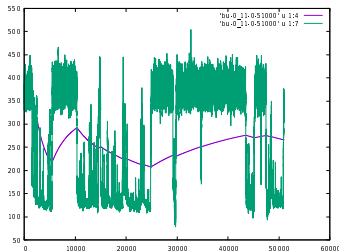
$$\left\langle \frac{\alpha}{\nu} \right\rangle_0^t$$

RNS & INS $R = 2048$, $h = 2^{-13}$, $N = 10$, un caso di intermittenza fra 2 attrattori: media corrente di $\frac{\alpha(t)}{\nu}$ ciononostante convergente a 1



$$\frac{\alpha(t)}{\nu}$$

Flutt. di $\frac{\alpha(\mathbf{u}(t))}{\nu}$ con intermittenza fra 2 attrattori



$\langle \text{En} \rangle_0^t$ $\text{En}(t)$

INS $R = 2048$, $h = 2^{-13}$, $N = 10$, intermittenza dell'enstrofia nel caso precedente.

Livi, May 31, 2023

20/25

Quoted references

- [1] C. Fefferman.
Existence & smoothness of the Navier–Stokes equation.
in J. Carlson, A. Jaffe, A. Wiles: The millennium prize problems. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [2] D. Ruelle.
Chaotic motions and strange attractors.
Accademia Nazionale dei Lincei, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [3] D. Ruelle.
Dynamical systems with turbulent behavior, volume 80 of *Lecture Notes in Physics*.
Springer, 1977.
- [4] D. Ruelle.
Turbulence, strange attractors and chaos.
World Scientific, New-York, 1995.
- [5] D. Ruelle.
Statistical Mechanics, Rigorous Results.
World Scientific, 3d edition, London, 1999.
- [6] E. Lieb and J. Lebowitz.
The Constitution of Matter: Existence of Thermodynamics for Systems Composed of Electrons and Nuclei.
Advances in Mathematics, 9:316–398, 1972.
- [7] G. Gallavotti.
Statistical Mechanics. A short treatise.
Springer Verlag, Berlin, 2000.
- [8] D. J. Evans and G. P. Morriss.
Statistical Mechanics of Nonequilibrium Fluids.

Academic Press, New-York, 1990.

- [9] **W. Hoover.**
Time reversibility Computer simulation, and Chaos.
World Scientific, Singapore, 1999.
- [10] **T. Yuge, N. Ito, and A. Shimizu.**
Nonequilibrium molecular dynamics simulation of electric conduction.
Journal of the Physical Society of Japan, 74:1895–1898, 2005.
- [11] **S. Nosé.**
A unified formulation of the constant temperature molecular dynamics methods.
Journal of Chemical Physics, 81:511–519, 1984.
- [12] **C. Dettman and G. Morriss.**
Hamiltonian formulation of the Gaussian isokinetic thermostat.
Physical Review E, 54:2495–2500, 1996.
- [13] **Z.S. She and E. Jackson.**
Constrained Euler system for Navier-Stokes turbulence.
Physical Review Letters, 70:1255–1258, 1993.
- [14] **G. Gallavotti.**
Nonequilibrium and Fluctuation Relation.
Journal of Statistical Physics, 180:1–55, 2020.
- [15] **G. Gallavotti.**
Viscosity, Reversibility, Chaotic Hypothesis, Fluctuation Theorem and Lyapunov Pairing.
Journal of Statistical Physics, 185:21:1–19, 2021.
- [16] **G. Margazoglu, L. Biferale, M. Cencini, G. Gallavotti, and V. Lucarini.**
Non-equilibrium Ensembles for the 3D Navier-Stokes Equations.
Physical Review E, 105:065110, 2022.

- [17] V. Shukla, B. Dubrulle, S. Nazarenko, G. Krstulovic, and S. Thalabard.
Phase transition in time-reversible Navier-Stokes equations.
Physical Review E, 100:043104, 2019.
- [18] G. Gallavotti.
Ensembles, Turbulence and Fluctuation Theorem.
European Physics Journal, E, 43:37, 2020.
- [19] A. Jaccod and S. Chibbaro.
Constrained Reversible system for Navier-Stokes Turbulence.
Physical Review Letters, 127:194501, 2021.