Esercizio

Si consideri la produzione del vettore bosone Z^0 attraverso il processo

$$\boldsymbol{e^+ + e^- \to Z^0}$$

1. In un esperimento a fasci incrociati, con fasci di ugual energia, quale deve essere la minima energia dei fasci perché la reazione abbia luogo?

2. In un esperimento a targhetta fissa, in cui un fascio di e^+ viene sparato su un bersaglio fisso di e^-
   a. Qual è l'energia minima che deve avere il fascio di positroni perché la reazione abbia luogo?
   b. Calcolare l'energia, nel sistema di riferimento del laboratorio, dello Z^0 prodotto a soglia.
   c. Dire di quanto è più piccola rispetto alla velocità della luce, la velocità nel sistema di riferimento del laboratorio dello Z^0 prodotto a soglia (ossia, calcolare $(1-\beta)$).
   d. Calcolare l'energia massima, nel sistema di riferimento del laboratorio, che può avere un muone prodotto in seguito al decadimento $\boldsymbol{Z^0 \to \mu^+\mu^-}$ di uno Z^0 prodotto a soglia.

Si usi:

$c = 1$

$m_{e^+} = m_{e^-} = m_e = 0.511 \text{ MeV}$

$m_{Z_0} = 91.2 \text{ GeV}$

$m_{\mu^+} = m_{\mu^-} = m_\mu = 106 \text{ MeV}$

Soluzione

1. FASCI INCROCIATI

$\sqrt{s} = E_{e^+} + E_{e^-} = 2E$
essendo fasci di elettroni e positroni ($m_{e^+} = m_{e^-} = m_e$) incrociati ($\vec{p}_{e^+} = -\vec{p}_{e^-}$) di ugual energia ($E_{e^+} = E_{e^-} = E$) .

A soglia $\sqrt{s} = m_{Z_0}$, dunque:

$$2E^{\text{soglia}} = m_{Z_0}$$

Da cui:

$$\boxed{E_{\text{soglia}}} = \frac{m_{Z_0}}{2} = \boxed{45.6 \text{ GeV}}.$$

2.a TARGHETTA FISSA

$s = (E_{e^+} + E_{e^-})^2 - |\vec{p}_{e^+} + \vec{p}_{e^-}|^2 =$
$= E_{e^+}^2 + E_{e^-}^2 + 2E_{e^+}E_{e^-} - |\vec{p}_{e^+}|^2 =$
$= m_{e^+}^2 + m_{e^-}^2 + 2E_{e^+}m_{e^-} =$
$= 2m_e^2 + 2E_{e^+}m_e$

Essendo $\vec{p}_{e^-} = 0$ e $m_{e^+} = m_{e^-} = m_e$.

A soglia $s = m_{Z_0}^2$, dunque:

$$2m_e^2 + 2E_{e^+}^{\text{soglia}}\, m_e = m_{Z_0}^2$$

Da cui

$$\boxed{E_{e^+}^{\text{soglia}}} = \frac{m_{Z_0}^2 - 2m_e^2}{2\, m_\mathrm{e}} \cong \boxed{\frac{m_{Z_0}^2}{2\, m_\mathrm{e}} = 8.14\ \times 10^6\ \mathrm{GeV}}.$$

2.b

$$\gamma_{Z_0} = \frac{E_{Z_0}}{m_{Z_0}} = \frac{E_{\text{iniziale}}^{\text{lab}}}{m_{Z_0}}$$

dato che $E_{Z_0} = E_{\text{iniziale}}^{\text{lab}}$, per la conservazione dell'energia.

A soglia,

$$\gamma_{Z_0} = \frac{E_{e^+}^{\text{soglia}} + \mathrm{m_{e^-}}}{m_{Z_0}} = \frac{\frac{m_{Z_0}^2}{2\, m_\mathrm{e}} + \mathrm{m_e}}{m_{Z_0}} = \frac{m_{Z_0}^2 + 2m_e^2}{2m_e m_{Z_0}} \cong \frac{m_{Z_0}}{2\, m_\mathrm{e}}$$

e l'energia

$$\boxed{E_{Z_0}} = \gamma_{Z_0} m_{Z_0} = \boxed{\frac{m_{Z_0}^2}{2\, m_\mathrm{e}} = E_{e^+}^{\text{soglia}}}.$$

2.c

La velocità dello Z^0:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{4\, m_\mathrm{e}^2}{m_{Z_0}^2}} \cong 1 - \frac{4\, m_\mathrm{e}^2}{2\, m_{Z_0}^2}$$

quindi:

$$\boxed{1 - \beta} = \frac{2\, m_\mathrm{e}^2}{m_{Z_0}^2} = \boxed{6.28 \times 10^{-11}}.$$

2.d

Consideriamo il decadimento

$$Z^0 \rightarrow\ \mu^+\mu^-$$

Per le trasformazioni di Lorentz, l'energia del muone (E_μ) nel sistema di riferimento del laboratorio è legata alla sua energia (${E_\mu}^*$) e al modulo del suo impulso (${p_\mu}^*$) nel sistema di riferimento del centro di massa attraverso la :

$$E_\mu = \gamma_{Z_0}\left({E_\mu}^* + \beta_{Z_0}{p_\mu}^* \cos {\theta_\mu}^*\right)$$

Dove $0 \le {\theta_\mu}^* \le 180°$ è l'angolo che il muone forma nel sistema di riferimento del centro di massa rispetto alla direzione del boost di Lorentz.

Essendo:

$$\gamma_{Z_0} = \frac{E_{Z_0}}{m_{Z_0}}$$

$$\beta_{Z_0} = \frac{p_{Z_0}}{E_{Z_0}}$$

$$E_\mu{}^* = \frac{m_{Z_0}}{2}$$

$$p_\mu{}^* = \sqrt{\left(\frac{m_{Z_0}}{2}\right)^2 - m_\mu^2} \cong \frac{m_{Z_0}}{2}$$

Allora:

$$E_\mu = \frac{E_{Z_0}}{m_{Z_0}}\left(\frac{m_{Z_0}}{2} + \frac{p_{Z_0}}{E_{Z_0}}\frac{m_{Z_0}}{2}\cos\theta_\mu{}^*\right)$$

L'energia del muone E_μ è massima per $\cos\theta_\mu{}^* = 1$, cioè quando muone e anti-muone, nel sistema di riferimento del centro di massa, sono *back-to-back* lungo la direzione del boost di Lorentz, quindi:

$$\boxed{E_\mu^{\mathrm{MAX}}} = \frac{E_{Z_0} + p_{Z_0}}{2} \cong E_{Z_0} = \boxed{E_{e^+}^{\mathrm{soglia}}}.$$

Esercizio 2

Un bersaglio di magnesio ($\rho = 1.738$ g cm^{-3}, massa molare 24,305 g mol^{-1}) viene colpito da un fascio di particelle α di intensità 0.2 nA. La reazione

$$\alpha +^{24}_{12} \mathrm{Mg} \rightarrow p +^{27}_{13} \mathrm{Al}$$

è isotropa ed ha sezione d'urto $\sigma = 0.143$ barn.

1. Supponendo di avere un rivelatore che copre tutto l'angolo solido e misura un flusso di $4.0 \cdot 10^4$ protoni al secondo, qual è lo spessore del bersaglio di magnesio?

2. Se il rivelatore copre un angolo solido di 1 steradiante, quale dovrebbe essere lo spessore del bersaglio tale da osservare lo stesso numero di conteggi?

Soluzione esercizio 2

1. La relazione che lega il numero di reazioni (che in questo caso corrisponde al numero di protoni) alle proprietà del bersaglio, al numero di proiettili (particelle α) e alla sezione d'urto del processo è la seguente:

$$dN_p/dt = dN_\alpha/dt \cdot n_b \cdot d \cdot \sigma = dN_\alpha/dt \cdot \rho \frac{N_A}{A} \cdot d \cdot \sigma \tag{1}$$

dove $dN_{p,\alpha}/dt$ sono le intensità in s^{-1} di protoni e particelle α, n_b è la densità di nuclei di Mg del bersaglio, d è lo spessore del bersaglio e σ la sezione d'urto del processo. Nel secondo passaggio si è usata la relazione che lega la densità n_b a quella di massa ρ che è fornita nel testo.

$$n_b = \rho \frac{N_A}{A} \tag{2}$$

Lo spessore del bersaglio d sarà, invertendo la 1

$$d = \frac{dN_p/dt}{dN_\alpha/dt \cdot \rho \frac{N_A}{A} \cdot \sigma} \tag{3}$$

Conosciamo l'intensità del fascio incidente in Ampere, per cui per passare a s^{-1} dobbiamo dividere per la carica che è pari a 2 volte la carica fondamentale

$$dN_\alpha/dt = \frac{0.2 \cdot 10^{-9} \text{ A}}{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 6.25 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1} \tag{4}$$

Conosciamo le sezione d'urto in barn. Usiamo il fatto che $1b = 10^{-24} cm^2$

$$\sigma = 0.143b = 1.43 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2 \tag{5}$$

Tutte le altre quantità sono note: $dN_p/dt = 4 \cdot 10^4$ s^{-1}, $A = 24.305$ g mol^{-1}, $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}, $\rho = 1.738$ g cm^{-3}

Sostituendo nella 3 si ottiene

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{4 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1} \cdot 24.305 \text{ g mol}^{-1}}{6.25 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1} \cdot 1.738 \text{ g cm}^{-3} \cdot 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot 1.43 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2} \\
&= 0.0104 \text{ cm}.
\end{aligned}
$$

2. Se il rivelatore copre solo una porzione di angolo solido $\Omega = 1$ sr e il processo è isotropo la sezione d'urto totale va moltiplicata per la frazione di angolo solido $\Omega/4\pi$. Quindi, usando la 3 nei due casi, a parità di tutto il resto avremo

$$d' = \frac{d}{\Omega/4\pi} = 0.0104 \text{ cm} \cdot 4\pi \text{ sr}/1 \text{ sr} = 0.130 \text{ cm}. \tag{6}$$