Primo compito di esonero del Corso di Elettromagnetismo A.A. 2005/2006

26 Maggio 2006

(Proff. F. Lacava, C. Mariani, D. Trevese)

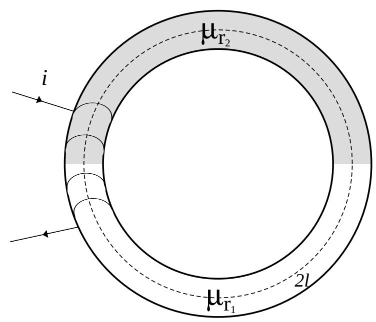
Esercizio 1

Un anello toroidale di lunghezza media $2l$, con $l = 10$ cm, e sezione $\Sigma = 5$ cm^2 è costituito da due semianelli congiunti di uguale lunghezza l composti da due materiali ferromagnetici di permeabilità magnetica relativa $\mu_{r_1} = 8$ e $\mu_{r_2} = 60$ rispettivamente. Sull'anello sono avvolte $N = 10^3$ spire percorse da corrente i. La circuitazione del campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ lungo una circonferenza entro l'anello vale $C(\mathbf{B}) = 10^{-2}$ T m. Si trascuri il flusso disperso e si considerino i campi uniformi su ogni sezione trasversa del toroide.

a) Determinare il valore della corrente i che passa nelle spire.

b) Si vuole creare un traferro di spessore $d = 4$ mm asportando parte del materiale ferromagnetico. Determinare in quale dei due semianelli si deve creare il traferro per avere al suo interno il più alto valore di campo magnetico, mantenendo inalterata la corrente nelle spire.

c) Indicare quali sono le correnti amperiane presenti nel toroide col traferro e calcolarne il valore totale.



Esercizio 2

Una spira di forma semicircolare di raggio $r = 10$ cm, resistenza elettrica $R = 30\ \Omega$ e coefficiente di autoinduzione trascurabile è posta col centro nell'origine di un piano coordinato x, y (vedi figura). Nel semipiano $x > 0$ è presente un campo di induzione magnetica uniforme e costante $B = 0.6$ T ortogonale al piano stesso. Indichiamo con θ l'angolo formato dal segmento OA della spira con l'asse y (quindi l'area della parte di spira immersa nel campo $\vec{B}$ varia proporzionalmente a θ), e consideriamo il caso in cui la spira sia mantenuta in rotazione con velocità angolare costante con legge oraria $\theta = \omega t$ ($\omega = 200$ rad/s). Si calcoli:

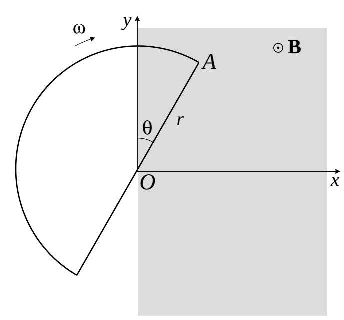
a) la corrente (come funzione del tempo t e specificandone il verso) che circola nella spira nell'intervallo di tempo $0 < t < \pi/\omega$, determinandone il valore massimo

b) la corrente (come funzione del tempo t e specificandone il verso) che circola nella spira nell'intervallo di tempo $\pi/\omega < t < 2\pi/\omega$

c) il momento (rispetto all'asse di rotazione) delle forze esercitate sulla parte curvilinea della spira nell'intervallo di tempo $0 < t < \pi/\omega$

d) il momento (rispetto all'asse di rotazione) delle forze esercitate sulla parte rettilinea della spira nell'intervallo di tempo $0 < t < \pi/\omega$

e) l'espressione ed il valore della potenza che è necessario spendere per mantenere la spira in rotazione nell'intervallo di tempo $0 < t < \pi/\omega$



Soluzione Esercizio 1

a) Il campo $\mathbf{B}$ è lo stesso nei due mezzi. Dalla conoscenza della circuitazione C si ottiene $B = C/(2l)$. Dal teorema della circuitazione di Ampère per H si ha $l(H_1 + H_2) = Ni$, dove i sottoindici si riferiscono ai due mezzi differenti. Usando le relazioni $B = \mu_o \mu_{r_1} H_1 = \mu_o \mu_{r_2} H_2$ si ottiene

$$i = \frac{C}{2N\mu_o}\left(\frac{1}{\mu_{r_1}} + \frac{1}{\mu_{r_2}}\right) \simeq \ 5.64 \cdot 10^{-1} \ \text{A} \ .$$

b) Se il traferro viene creato nel primo mezzo si ha, dal teorema di Ampère $H_1(l-d) + H_2 l + H_o d = Ni$, e quindi, scrivendo tutto in funzione del campo B:

$$B^{(1)} = \frac{Ni\mu_o}{l\left(\frac{1}{\mu_{r_1}} + \frac{1}{\mu_{r_2}}\right) + d\left(1 - \frac{1}{\mu_{r_1}}\right)} \simeq \ 4.01 \cdot 10^{-2} \ \text{T} \ .$$

Se il traferro viene invece creato nel secondo mezzo si ha

$$B^{(2)} = \frac{Ni\mu_o}{l\left(\frac{1}{\mu_{r_1}} + \frac{1}{\mu_{r_2}}\right) + d\left(1 - \frac{1}{\mu_{r_2}}\right)} \simeq \ 3.91 \cdot 10^{-2} \ \text{T} \ .$$

Pertanto, per ottenere il più alto valore di campo, si deve praticare il traferro nel primo mezzo, ossia quello con permeabilità magnetica più bassa.

c) All'interno del toroide, essendo la magnetizzazione uniforme, non ci sono correnti amperiane di volume $\mathbf{J}_v = \nabla \times \mathbf{M} = 0$. Le correnti amperiane presenti sono quindi solamente di superficie e si ottengono dalla relazione $\mathbf{J}_s = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$. Si ha pertanto $i_a = (l-d)J_{s_1} + lJ_{s_2} = (l-d)(\mu_{r_1} - 1)H_1 + l(\mu_{r_2} - 1)H_2 = (l-d)(\mu_{r_1} - 1)B^{(1)}/\mu_o\mu_{r_1} + l(\mu_{r_2} - 1)B^{(1)}/\mu_o\mu_{r_2}$.
Poichè però il problema richiede solo il valore della corrente amperiana totale i_a, si poteva giungere allo stesso risultato utilizzando il teorema della circuitazione di Ampère per $\mathbf{B}$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_o(Ni + i_a)$$

ed ottenere (usando il valore $B^{(1)}$)

$$i_a = \frac{2lB^{(1)}}{\mu_o} - Ni \simeq \ 5.82 \cdot 10^3 \ \text{A} \ .$$

Soluzione Esercizio 2

a,b) Scegliamo la normale alla spira con verso opposto a quello del campo $\vec{B}$ ed il verso convenzionale della corrente che percorre la spira, I, concorde a quello di rotazione della spira. (Ovviamente gli stessi risultati fisici possono essere ottenuti con altre convenzioni, a patto di usarle coerentemente in tutta l'analisi.) Dalla legge di Faraday-Neumann otteniamo una forza elettromotrice $-d\Phi/dt$ con il flusso dato da

$$\Phi = -B(\theta/2)r^2 \qquad per \;\; 0 < t < \pi/\omega$$
$$\Phi = -B((2\pi - \theta)/2)r^2 \qquad per \;\; \pi/\omega < t < 2\pi/\omega$$

Quindi, tenuto conto del fatto che $\theta = \omega t$, per la corrente troviamo

$$I = \frac{B\omega r^2}{2R} \simeq \; 2 \cdot 10^{-2} \text{ A} \qquad per \;\; 0 < t < \pi/\omega$$
$$I = -\frac{B\omega r^2}{2R} \qquad per \;\; \pi/\omega < t < 2\pi/\omega$$

c) La forza di Lorentz viene esercitata dal campo $\vec{B}$ solo sulla parte di filo che si trova nel semipiano $x > 0$. Per i punti della parte curvilinea della spira la forza di Lorentz agisce in direzione radiale e quindi il momento di tali forze rispetto all'asse di rotazione è nullo

d) Per quanto riguarda il segmento rettilineo si trova che su ciascun intervallino infinitesimo dr che compone il segmento rettilineo agisce la forza di Lorentz

$$d\vec{F} = -IdrB\hat{r} \times \hat{z} = -IdrB\hat{\theta} \qquad per \;\; 0 < t < \pi/\omega$$

dove $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ rappresentano i versori in coordinate polari e $\hat{z}$ rappresenta il versore parallelo al campo B. Quindi il momento totale dovuto alla Forza di Lorentz è

$$\vec{M} = \int d\vec{M} = \int \vec{r} \times d\vec{F} = -IB \int dr \; \vec{r} \times \hat{\theta} = IB\frac{r^2}{2}\hat{z} \tag{1}$$

e) La potenza necessaria per mantenere la spira in rotazione nell'intervallo di tempo $0 < t < \pi/\omega$ si ottiene da

$$P = \vec{M}_{ext} \cdot \vec{\omega} = -\vec{M} \cdot \vec{\omega} = I\omega B\frac{r^2}{2} = RI^2 \simeq \; 1.2 \cdot 10^{-2} \text{ W} \tag{2}$$

Si poteva anche osservare che la stessa potenza è anche necessaria per mantenere la spira in rotazione nell'intervallo di tempo $\pi/\omega < t < 2\pi/\omega$ (la corrente cambia segno ma la forza agisce sull'altra metà del tratto rettilineo).