Secondo compito di esonero del Corso di Elettromagnetismo A.A. 2005/2006

30 Giugno 2006

(Proff. F. Lacava, C. Mariani, D. Trevese)

Esercizio 1

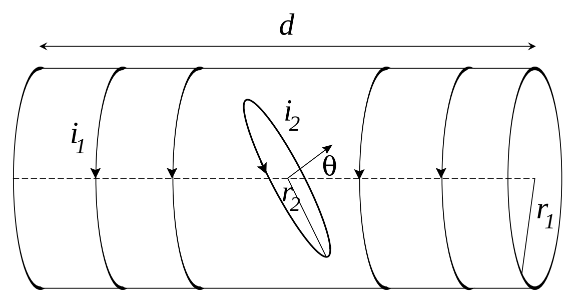
Un solenoide circolare di raggio $r_1 = 1$ cm e lunghezza $d = 100$ cm è costituito da $N = 10^4$ spire percorse da corrente $i_1 = 2$ A. Una spira circolare di raggio $r_2 = 2$ mm percorsa da corrente $i_2 = 1$ A (con verso concorde ad i_1) ha centro sull'asse del solenoide e la sua normale forma un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto a detto asse. Le correnti nei due circuiti sono mantenute costanti da opportuni generatori.
Nell'approssimazione di solenoide indefinito, determinare:

a) il coefficiente di mutua induzione $\mathcal{M}$ tra i due circuiti;

b) l'espressione dell'energia magnetica totale del sistema costituito dai due circuiti ed il valore dell'energia magnetica di mutua interazione;

c) il momento M delle forze magnetiche (rispetto all'asse perpendicolare alla normale alla spira e all'asse del solenoide) che agisce sulla spira circolare;

d) il momento M nel caso in cui la spira, sempre centrata sull'asse del solenoide e con la stessa orientazione considerata in precedenza, abbia raggio $r_2' > r_1/\cos\theta$, ossia si trovi completamente all'esterno del solenoide.



Esercizio 2

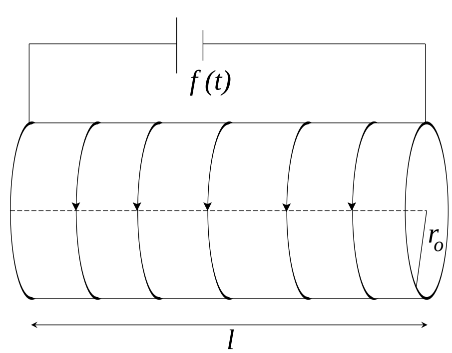
Al tempo $t = 0$ un generatore di forza elettromotrice dipendente dal tempo con legge $f = k \cdot t$ ($k = 0.2$ V s^{-1}) viene applicato ad un solenoide cilindrico di $N = 3000$ spire di resistenza trascurabile, avente lunghezza $l = 3$ m e raggio $r_o = 2$ cm. Nell'approssimazione di solenoide indefinito, si determini:

a) l'espressione in funzione del tempo della corrente i che passa nel solenoide e del campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ al suo interno;

b) il campo elettrico $\mathbf{E}$ in funzione della distanza r dall'asse del solenoide, all'interno e all'esterno del solenoide stesso, specificandone direzione e verso;

c) il vettore di Poynting in funzione della distanza r dall'asse (specificandone direzione e verso);

d) il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale del solenoide calcolandone il valore numerico all'istante $t = 2$ s (trascurare gli effetti di bordo).



Soluzione Esercizio 1

a) Per il calcolo di $\mathcal{M}$ conviene considerare il campo $\mathbf{B}_1$ prodotto dal solenoide ed il suo flusso Φ_2 attraverso la spira circolare. Nell'approssimazione di solenoide indefinito il campo, uniforme all'interno del solenoide, è $\mathbf{B}_1 = \mu_o N i_1/d$, per cui $\Phi_2(\mathbf{B}_1) = \pi r_2^2 B_1 \cos\theta$, avendo considerato l'orientazione della spira rispetto all'asse del solenoide. Si ottiene quindi

$$\mathcal{M} = \frac{\Phi_2(\mathbf{B}_1)}{i_1} = \frac{\pi r_2^2 \mu_o N \cos\theta}{d} \simeq \ 1.37 \cdot 10^{-7} \text{ H} \ .$$

b) L'espressione dell'energia magnetica del sistema è $U_m = L_1 i_1^2/2 + L_2 i_1^2/2 + \mathcal{M} i_1 i_2$. L'energia di mutua interazione è

$$U_m^{int.} = \mathcal{M} i_1 i_2 = \frac{\pi r_2^2 \mu_o N \cos\theta}{d} i_1 i_2 \simeq \ 2.74 \cdot 10^{-7} \text{ J} \ .$$

c) Considerando l'energia in funzione dell'angolo θ, l'espressione del momento delle forze magnetiche è

$$M = +\frac{dU_m}{d\theta} = -\frac{\pi r_2^2 \mu_o N \sin\theta}{d} i_1 i_2 \ .$$

Sostituendo i valori del problema si ottiene

$$M \simeq \ 1.58 \cdot 10^{-7} \text{ J/rad} \ .$$

d) Se la spira si trova all'esterno del solenoide si ha che il coefficiente di mutua induzione non dipende piú dall'angolo θ, ossia dall'orientazione della spira. Infatti in tal caso, ripetendo il ragionamento fatto al punto *a)*, si evince che il flusso del campo $\mathbf{B}_1$ prodotto dal solenoide attraverso la spira è dato da

$$\Phi_2(\mathbf{B}_1) = \frac{\pi r_1^2}{\cos\theta} B_1 \cos\theta = \pi r_1^2 B_1 \ ,$$

dove si è tenuto conto che il campo è nullo all'esterno del selenoide e che l'area attraverso cui fare il flusso contiene un fattore $\cos\theta$ al denominatore. A tale risultato si poteva anche arrivare considerando superfici (aventi come bordo il circuito della spira) intersecanti il solenoide attraverso sezioni circolari di area πr_1^2. Si ha pertanto un coefficiente di mutua induzione indipendente da θ

$$\mathcal{M}' = \frac{\pi r_1^2 \mu_o N}{d}$$

ossia un'energia indipendente da θ e quindi un momento delle forze magnetiche nullo

$$M' = 0 \ .$$

Si poteva anche arrivare a tale conclusione in maniera più diretta, considerando che il campo è nullo fuori dal solenoide indefinito ($\mathbf{B}_1 = 0$) e quindi non vi sono forze agenti sulla spira ($d\mathbf{F} = i_2 d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_1 = 0$).

Soluzione Esercizio 2

a) L'equazione del circuito, considerando la resistenza trascurabile, è $f - Ldi/dt = 0$, dove $L = \mu_o N^2 \pi r_o^2 / l$ è l'induttanza del solenoide indefinito. Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$i(t) = \frac{k}{2L}\, t^2 = \frac{kl}{2\mu_o N^2 \pi r_o^2}\, t^2 \ .$$

Il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$, diretto lungo l'asse, è

$$B(t) = \frac{\mu_o N i(t)}{l} = \frac{k}{2N\pi r_o^2}\, t^2 \ .$$

b) Dall'equazione di Maxwell $\nabla\times\mathbf{E} = -d\mathbf{B}/dt$ in forma integrale $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -d\Phi(\mathbf{B})/dt$, si ottiene (considerando circonferenze di raggio $r < r_o$)

$$E(r,t) = -\frac{1}{2\pi r}\pi r^2 \frac{dB}{dt} = -\frac{ktr}{2\pi N r_o^2} \qquad \text{per } r < r_o \ ,$$

avendo tenuto conto della simmetria del problema, per cui $\mathbf{E}$ è tangente alle circonferenze centrate sull'asse. Il verso di $\mathbf{E}$ risulta contrario a quello di percorrenza della corrente i, ossia orario se visto dall'asse di $\mathbf{B}$ positivo. Considerando circonferenze di raggio $r > r_o$ si ha invece (il flusso di $\mathbf{B}$ è non nullo solo all'interno del solenoide)

$$E(r,t) = -\frac{1}{2\pi r}\pi r_o^2 \frac{dB}{dt} = -\frac{kt}{2\pi N r} \qquad \text{per } r > r_o \ .$$

c) Il vettore di Poynting, definito da $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{B}/\mu_o$, è non nullo all'interno del solenoide ed il suo modulo è

$$|\mathbf{S}(r,t)| = \frac{|E||B|}{\mu_o} = \frac{k^2 t^3 r}{\mu_o r_o^4 (2\pi N)^2} \ ,$$

normale all'asse del solenoide e con verso entrante.

d) Il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale del solenoide è

$$\Phi_\mathbf{S}(t) = -|\mathbf{S}(r_o,t)|\ 2\pi r_o l = \frac{k^2 t^3 l}{2\pi\mu_o r_o^2 N^2} \ ,$$

e per $t = 2$ s si ottiene

$$\Phi_\mathbf{S}(t = 2\text{s}) \simeq\ -33.8 \text{ W} \ .$$

Si noti il segno negativo, indicante un flusso entrante: il generatore, facendo aumentare la corrente nel solenoide e quindi il campo in esso presente, sta trasferendo energia all'interno del solenoide.