Prova scritta di Elettricità e Magnetismo ed Elettromagnetismo A.A. 2005/2006

8 Settembre 2006

(Proff. F. Lacava, C. Mariani, F. Ricci, D. Trevese)

Modalità

- Prova scritta di Elettricità e Magnetismo: Esercizi 1 e 2 (3 ore)
- Prova scritta di Elettromagnetismo: Esercizi 3 e 4 (3 ore)
- Prova scritta di Elettricità e Magnetismo e di Elettromagnetismo: Esercizi 1, 3 e 4 (4 ore)

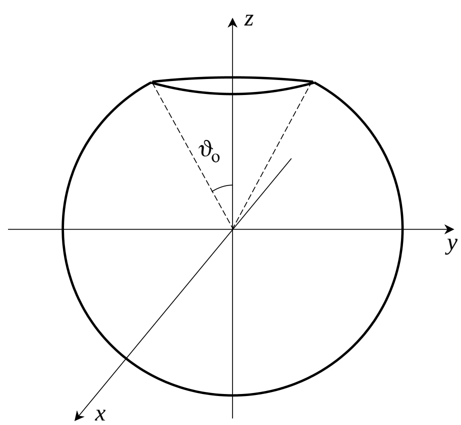
Esercizio 1

Da una superficie sferica isolante di raggio $R = 4$ cm carica con densità superficiale $\sigma = 2 \cdot 10^{-10}$ C cm^{-2} viene asportata simmetricamente rispetto all'asse z una parte di calotta, il cui bordo ha coordinata polare $\theta_o = \pi/6$ (vedi figura). Determinare:

a) il valore del potenziale V al centro della superficie sferica;

b) il campo elettrico **E** (in modulo, direzione e verso) al centro della superficie sferica;

c) la velocità asintotica raggiunta da una particella di massa m e carica q , con $q/m = 4 \cdot 10^{-4}$ C Kg^{-1}, posta inizialmente al centro della superficie sferica con velocità nulla.



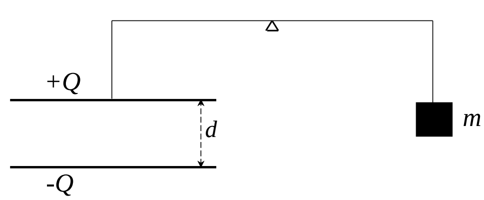
Esercizio 2

L'armatura superiore di un condensatore a facce quadrate di lato $l = 10$ cm è connessa al braccio di una bilancia. Il condensatore, carico ed isolato, viene inizialmente posto in aria e mantenuto in equilibrio ad una distanza $d = 0.1$ cm da una massa $m = 10$ g. Il condensatore viene quindi immerso in un liquido isolante di costante dielettrica relativa ϵ_r. Per mantenere l'equilibrio è necessario ridurre la massa sul piatto della bilancia al valore $m' = 4$ g. Si consideri inalterata la distanza d tra le armature.
Trascurando la massa dell'armatura del condensatore e la spinta di Archimede, determinare:

a) il valore della carica Q posseduta dal condensatore;

b) il valore della costante dielettrica relativa ϵ_r del liquido;

c) la variazione di d.d.p. tra le armature del condensatore tra le situazioni in aria e nel liquido.



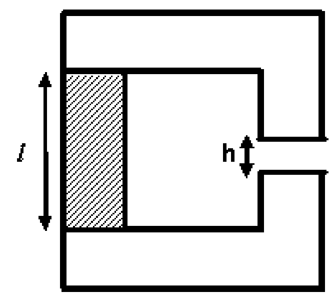
Esercizio 3

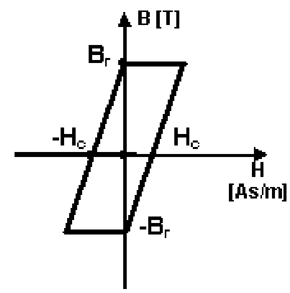
Un magnete permanente è costituito da una sbarra prismatica magnetizzata di lunghezza $l = 150$ cm e sezione S di dimensioni lineari trascurabili rispetto a l, e da due bracci di materiale ferromagnetico, con permeabilità magnetica molto maggiore del materiale di cui è costituita la sbarra magnetizzata e di stessa sezione della sbarra, che delimitano un traferro di spessore $h = 5$ mm (vedi figura). La sbarra è stata magnetizzata in modo permanente; la curva di magnetizzazione del materiale nel piano (H, B), riportata in figura, è caratterizzata da un induzione magnetica residua $B_r = 0.8$ T, e da un campo magnetico di coercizione $H_c = 4 \cdot 10^4$ As/m, e da tratti approssimabili come rettilinei.
Trascurando il flusso disperso, si calcolino:

a) valori del campo magnetico $\mathbf{H}$ e del campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ nella sbarra magnetizzata e nel traferro;

b) il valore dell'intensità di magnetizzazione nella sbarra magnetizzata;

c) La permeabilità magnetica relativa efficace del materiale che costituisce la sbarra prismatica.





Esercizio 4

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 10$ MHz, polarizzata linearmente, si propaga nella direzione dell'asse x. Nell'origine del sistema di coordinate è posta una spira circolare di area $S = 20$ cm^2. Il versore $\mathbf{n}$ normale al piano della spira giace nel piano (y, z) e forma un angolo θ con l'asse y.

a) Si verifichi che la lunghezza d'onda λ è molto molto maggiore del raggio R della spira;

b) Sapendo che la f.e.m. indotta nella spira è massima quando $\theta = \pi/3$ e che il valore massimo vale 1.26 mV, si determini l'espressione delle componenti dei campo elettrico e di induzione magnetica lungo gli assi x, y, z in funzione delle coordinate spaziali e temporali.

c) Si calcoli la forza a cui è soggetta una superficie piana completamente assorbente di area $A = 0.5$ m^2, investita dall'onda, la cui normale forma un angolo $\alpha = \pi/4$ con la direzione dell'asse x.

Soluzione Esercizio 1

a) Il potenziale al centro della sfera vale

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_o R}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta_o}^{\pi} d\theta\ R^2 \sin\theta = \frac{\sigma R}{2\epsilon_o}\int_{\theta_o}^{\pi} d\theta\ \sin\theta = \frac{\sigma R}{2\epsilon_o}(1+\cos\theta_o) \simeq\ 8.43 \cdot 10^3\ \text{V}\ .$$

b) Data la simmetria del problema il campo elettrico $\mathbf{E}$ al centro della sfera è diretto lungo l'asse z nel verso positivo e vale

$$E = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_o R^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta_o}^{\pi} d\theta\ R^2 \sin\theta\ \cos\theta = \frac{\sigma}{4\epsilon_o}\sin^2\theta_o \simeq\ 1.41 \cdot 10^4\ \text{Vm}^{-1}\ .$$

c) La velocità asintotica v si ottiene ugualgliando l'energia finale (cinetica) a quella iniziale (potenziale): $mv^2/2 = qV$, per cui:

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} \simeq\ 2.60\ \text{ms}^{-1}\ .$$

Soluzione Esercizio 2

a) La forza elettrostatica sull'armatura superiore del condensatore mantenendo la carica costante si ottiene derivando l'energia rispetto alla variabile x, distanza tra le armature: $F_e = -dU/dx$, con $U = Q^2/2C$ e $C = \epsilon_o l^2/x$. Si ottiene quindi $F_e = -Q^2/2\epsilon_o l^2$ (il segno meno indica che la forza è attrattiva). All'equilibrio tale forza uguaglia quella gravitazionale sulla massa m: $mg = |F_e|$. Il valore della carica Q è pertanto:

$$Q = l\sqrt{2\epsilon_o mg} \simeq\ 1.32 \cdot 10^{-7}\ \text{C}\ .$$

b) In presenza del dielettrico, la capacità del condensatore aumenta di ϵ_r e quindi la forza risulta $F_e' = -Q^2/2\epsilon_o\epsilon_r l^2$. All'equilibrio $m'g = |F_e'|$, da cui:

$$\epsilon_r = \frac{Q^2}{2\epsilon_o l^2 m' g} = \frac{m}{m'} =\ 2.5\ .$$

Si poteva anche arrivare a tale risultato ossevando che nel caso con dielettrico si ottiene la stessa espressione di Q ricavata al punto a ma con ϵ e m' al posto di ϵ_o e m. Dovendo rimanere la carica costante, uguagliando le due espressioni si ottiene $\epsilon_r m' = m$.

c) La d.d.p. in aria è $\Delta V = Q/C = Qd/\epsilon_o l^2$, mentre in presenza del dielettrico $\Delta V' = Q/C' = Qd/\epsilon_o\epsilon_r l^2$. La variazione è pertanto

$$\Delta V' - \Delta V = -\frac{Qd(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_o\epsilon_r l^2} = -\sqrt{\frac{2mg}{\epsilon_o}}\frac{d}{l}\left(1 - \frac{m'}{m}\right) \simeq\ -8.93 \cdot 10^2\ \text{V}\ .$$

Soluzione Esercizio 3

Applicando il teorema della circuitazione:

$$\int H \cdot dl = H_F l + H_0 h = 0 \tag{1}$$

avendo indicato con H_F il campo magnetico nella barra prismatica magnetizzata e con H_0 il campo magnetico nel traferro ed avendo trascurato il contributo dovuto alle ancore di ferro dolce.

Da cui:

$$H_F = -H_0 \frac{h}{l} \tag{2}$$

Essendo poi: $H_0 = B/\mu_0$ si ha:

$$H_F = -\frac{Bh}{\mu_0 l} \tag{3}$$

che fornisce il legame tra H e B nel ferro (essendo B comunque costante in tutto il circuito magnetico).

Dalla curva di magnetizzazione riportata in figura, la retta $B = B(H)$ nel quarto quadrante ha equazione:

$$B = mH_F + q \rightarrow B = \frac{B_r}{H_c} H_F + B_r \tag{4}$$

Il valore di B nel ferro (e quindi in tutto il circuito) lo si ottiene dall'intersezione tra la retta (4) e l'espressione di H_F: (3):

$$B = -\frac{B_r}{H_c}\frac{Bh}{\mu_0 l} + B_r \rightarrow B = \frac{\mu_0 H_c B_r l}{\mu_0 H_c l + B_r h} = 0.76\ T \tag{5}$$

$$H_F = -\frac{B}{\mu_0}\frac{h}{l} = -\frac{H_c B_r h}{\mu_0 H_c l + B_r h} = -2016\ As/m \tag{6}$$

$$H_0 = \frac{B}{\mu_0} = 604789\ As/m \tag{7}$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H_F = 606805\ As/m \tag{8}$$

$$\mu_r = \frac{|B|}{\mu_0 |H_F|} = \frac{l}{h} = 300 \tag{9}$$

Soluzione Esercizio 4

$$\lambda\nu = c \rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} = 30\ m >> R = \sqrt{S/\pi} = 2.5\ cm \tag{10}$$

$$fem = -\frac{d\phi(B)}{dt} = -d/dt \int B \cdot ndS = \omega B_0 S \sin(kx - \omega t) \tag{11}$$

per cui:

$$fem_{max} = \omega B_0 S \rightarrow B_0 = \frac{fem_{max}}{\omega S} = 1 \cdot 10^{-8}\ T \tag{12}$$

ed anche:

$$E_0 = B_0 c = 3V/m \tag{13}$$

La f.e.m. è massima quando **B** è parallelo a **n**, di conseguenza la direzione del campo di induzione magnetica **B** forma un angolo $\theta = \pi/3$ con l'asse y. Risulta pertanto:

$$B_x = 0 \tag{14}$$
$$B_y = B_0 \cos(kx - \omega t) \cos\theta \tag{15}$$
$$B_z = B_0 \cos(kx - \omega t) \sin\theta \tag{16}$$

Il campo elettrico **E** è ottenibile direttamente dalla relazione: $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{v}$:

$$E_x = 0 \tag{17}$$
$$E_y = E_0 \cos(kx - \omega t) \sin\theta \tag{18}$$
$$E_z = -E_0 \cos(kx - \omega t) \cos\theta \tag{19}$$

dove $\omega = 2\pi\nu$ e $k = \omega/c$.

La pressione di radiazione vale $P_r = I/c$ per cui:

$$F = P_r S sin\alpha = \frac{IS}{c} cos\alpha = 1.4 \cdot 10^{-11}\ N \tag{20}$$

dove l'intensità media dell'onda vale: $I = E_0^2/2Z_0 = 12mW/m^2$.