Prova Scritta di Elettricità e Magnetismo e di Elettromagnetismo

A. A. 2006-07 - 1 Febbraio 2008

(Proff. F.Lacava, C.Mariani, F.Ricci, D.Trevese)

Modalità:
- Prova scritta di Elettricità e Magnetismo: Esercizi 1 e 2 (3 ore).
- Prova scritta di Elettromagnetismo: Esercizi 3 e 4 (3 ore).
- Prova scritta di Elettricità e Magnetismo e di Elettromagnetismo: Esercizi 1, 3 e 4 (4 ore).

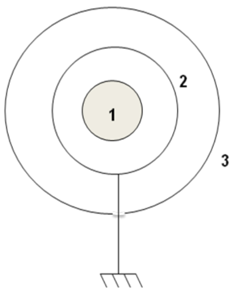
Esercizio 1

Intorno ad una sfera metallica di raggio $r_1 = 3.0\ cm$, sulla quale è depositata una carica $Q_1 = 2.0 \cdot 10^{-8}\ C$, si trovano due armature metalliche di spessore trascurabile, rispettivamente di raggi $r_2 = 5.0\ cm$ e $r_3 = 8.0\ cm$. Sull'armatura più esterna è depositata una carica $Q_3 = 4.0 \cdot 10^{-8}\ C$ mentre l'armatura intermedia è connessa a massa.

a) Si determini la carica presente sull'armatura intermedia;

b) si scriva l'espressione del campo elettrico in tutto lo spazio e se ne faccia un grafico;

c) si determini la pressione sulle due superfici dell'armatura intermedia indicando la direzione della forza risultante.



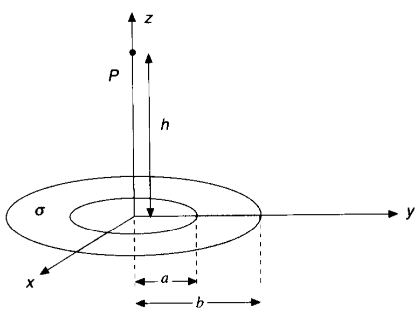
Esercizio 2

Un anello circolare di raggio interno $a=10\ cm$, raggio esterno $b=20\ cm$ e spessore trascurabile giace nel piano z = 0 con centro nell'origine. Sull'anello è distribuita in modo uniforme una carica elettrica con densità superficiale $\sigma = A/r^2$ dove r è la distanza dall'asse ed $A = 7.21 \times 10^{-8}\ C$. L'anello ruota con velocità angolare $\omega=2000\ rad/s$ diretta secondo l'asse z. Determinare:

a) il modulo, la direzione e il verso del campo d'induzione magnetica in un punto sull'asse z a distanza $h=30\ cm$ dall'origine.

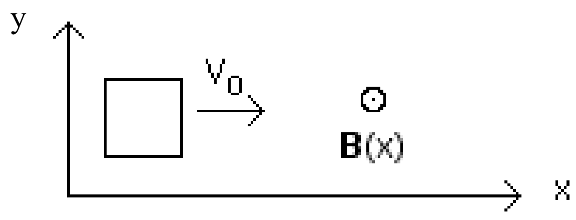
b) il modulo, la direzione e il verso del momento di dipolo magnetico equivalente di tale sistema.

c) il modulo, la direzione e il verso del campo d'induzione magnetica in un punto giacente sul piano $z = 0$ a distanza $d = 10\ m$ dall'origine nell'approssimazione in cui d sia assunto molto maggiore delle dimensioni dell'anello.



Esercizio 3

Una spira rigida, giacente sul piano xy , di forma quadrata di lato $L=5.0$ cm, di massa $m=2.0\ g$ e resistenza elettrica $R=10\ \Omega$, si muove sul piano con una velocità iniziale $v_o= 3.0\ m/s$ diretta come l'asse x. Essa è immersa in un campo magnetico $B = (B_o+ a\ x)$, ortogonale al piano della spira stessa ($a =2.0\ Wb/m^3$).
Trascurando l'autoinduzione, determinare:
a) la velocità della spira in funzione del tempo;
b) la carica elettrica che fluisce complessivamente nella spira fra il tempo iniziale e il tempo infinito.



Esercizio 4

Un fascio parallelo di luce laser di diametro 5 mm e di lunghezza d'onda $\lambda = 632\ nm$ è puntato in direzione e verso dell'asse verticale x. Nell'approssimazione di onda piana del fascio luminoso, il suo vettore campo elettrico **E** è orientato come l'asse y e ha ampiezza $50\ kV/m$.
Calcolare:

a) la frequenza del laser,
b) la direzione e l'ampiezza del campo magnetico associato all'onda,
c) l'intensità e la potenza del laser.

Si vuole mantenere in equilibrio nel campo gravitazionale terrestre un cilindretto perfettamente riflettente, di diametro inferiore a quello del fascio, per mezzo della pressione di radiazione.

d) Quale deve essere l'altezza H del cilindro se esso ha densità $\rho = 2.7\ g/cm^3$?

Soluzione

Esercizio 1

a) Il sistema ha simmetria sferica e il campo ha quindi direzione radiale. Inoltre sull'armatura connessa a massa, la carica Q_2 deve esser tale che il potenziale complessivo su di essa sia nullo. Per il principio di sovrapposizione:

b)
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_2}+\frac{Q_2}{r_2}+\frac{Q_3}{r_3}\right)=0$$

Ne segue

$$Q_2 = -\,4{,}5 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}\ .$$

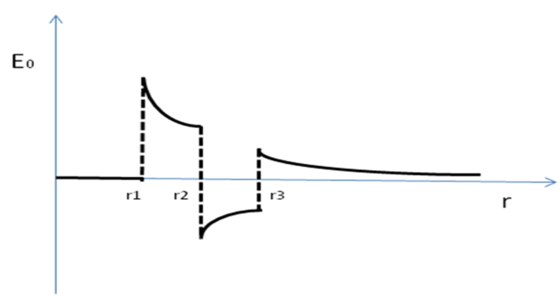
b) Ricordando che il campo elettrico è nullo all'interno di un conduttore e applicando il principio di sovrapposizione:

0 < r < 3 cm: $E_0 = 0$

3 < r < 5 cm: $E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}$ $\quad E_0(r_1+) = 2{,}00 \cdot 10^5$ V/cm $\quad E_0(r_2-) = 0{,}72 \cdot 10^5$ V/cm

5 < r < 8 cm: $E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1+Q_2}{r^2}$ $\quad E_0(r_2+) = -\,0{,}90 \cdot 10^5$ V/cm $\quad E_0(r_3-) = -\,0{,}35 \cdot 10^5$ V/cm

r > 8 cm : $E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1+Q_2+Q_3}{r^2}$ $\quad E_0(r_3+) = 0{,}21 \cdot 10^5$ V/cm



c) per il calcolo della pressione ricordiamo che la pressione in prossimità di una superficie è p = u , u = densità di energia elettrostatica:

$$p(r_2^-) = u(r_2^-) = \frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon_0}\frac{Q_1^2}{r_2^4} = 2{,}30 \cdot 10^{-2}\ N/m^2 \qquad \text{verso l'interno}$$

$$p(r_2^+) = u(r_2^+) = \frac{1}{2}\frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon_0}\frac{(Q_1+Q_2)^2}{r_2^4} = 3{,}59 \cdot 10^{-2}\ N/m^2 \qquad \text{verso l'esterno}$$

$$p(r_2^+) - p(r_2^-) = 1{,}29 \cdot 10^{-2}\ N/m^2$$

Allo stesso risultato si perviene valutando la forza complessiva dalla variazione dell'energia elettrostatica.

Esercizio 2

L'anello carico posto in rotazione è equivalente ad un insieme di spire concentriche percorse da corrente e giacenti sul piano $z=0$. Sia ***dl*** l'elemento di spira giacente su tale piano e diretto come la velocita del punto del disco considerato; inoltre indichiamo con ***R*** il vettore che dall'elemento ***dl*** individua il punto P sull'asse del sistema.
Lungo un qualunque punto dell'asse del sistema ciascuna spira contribuisce al campo d'induzione magnetica totale generando un vettore d'induzione infinitesimo diretto lungo l'asse data la simmetria di rotazione. Infatti, due elementi di spira simmetrici rispetto al centro, generano due campi di induzione magnetica aventi le componenti ortogonali all'asse z uguali ed opposte. La componente z del campo generato da un elemento di spira di lunghezza l è

$$dB_z = |d\mathbf{B}|\, \sin\theta = |d\mathbf{B}|\, (r /|\mathbf{R}|) = \mu_o\, di\, dl\, (r / |\mathbf{R}|^3)$$

Integrando su tutta la lunghezza della spira si ottiene il campo generato dalla spira:

$$dB_z = \int_o^{2\pi} (\mu_o /4\pi)\, di\, dl\, (r / |\mathbf{R}|^3) = (\mu_o /2)\, di\, (r^2 / |\mathbf{R}|^3)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che r, R e di sono costanti in ogni punto della spira generica. Il campo risultante in P si ottiene sommando i contributi infinitesimi generati dalle spire concentriche di raggio r con $a < r <$ b in ciascuna delle quali corre la corrente

$$di = (2\pi/ T)\, r\, dr\, \sigma = \omega\, dr\, A/r\, .$$

essendo $\sigma = (A/r^2)$ ed il periodo di rotazione dell'anello $T = (2\pi / \omega)$:

$$B_z(h) = \int_{a^2+h^2}^{b^2+h^2} (\mu_o A\, \omega / 4)\, (dx / x^{3/2}) =$$
$$= (\mu_o A\omega/2)[(a^2+h^2)^{-1/2} - (b^2+h^2)^{-1/2}]= 3.5 \times 10^{-11} \quad [T]$$

Per effettuare l'integrale abbiamo utilizzato la variabile di integrazione $x = |R|^2 = r^2 + h^2$ con $dx= 2\, r\, dr$.

2) Il dipolo magnetico del disco è calcolabile applicando il teorema d'equivalenza d'Ampère. Ciascuna spira elementare ha un momento magnetico associato diretto lungo l'asse z il cui modulo è pari a $dm= \pi r^2\, di$
Essendo $di = \omega\, dr\, A/r$, il modulo del momento magnetico totale è

$$m = \int_a^b A\, \pi\, r\, \omega\, dr = (1/2)\ \pi\, \omega\, A\, (b^2 - a^2) = 6.8 \times 10^{-6} \quad [A\, m^2]$$

3) Essendo d>> b, si tratta di calcolare il campo a grande distanza dall'anello. In questa approssimazione esso è equivalente a quello generato da un dipolo magnetico posto al centro dei disco e diretto lungo l'asse *z* nel verso positivo. Il campo dipolare in un punto sul piano z=0 a distanza d dall'origine è quindi diretto come l'asse z ed ha modulo pari a

$$B(d) = -(\mu_o\, m\ /4\, \pi\, d^3) = -[1/(8\, d^3)]\ \mu_o A\omega\ (b^2 - a^2) = -6.8 \times 10^{-16}\ \ [T]$$

Esercizio 3

a) Il flusso del campo magnetico tagliato dalla spira è ottenuto calcolando il seguente integrale:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{B}) = \int_x^{x+L} (B_o+ax)\, L\, dx = L^2\,(B_o + a\, L/2) + a\, L^2\, x$$

E segue che la forza elettromotrice indotta è

$$f = -d\, \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{B})\, /dt = -a\, L^2 v$$

e la corrente che corre nella spira

$$i = f/R = -aL^2 v\, /R$$

Le forze applicate ai lati della spira paralleli all'asse *x* sono uguali in modulo, dirette come l'asse *y* e di verso opposto. Quindi la risultante di tale forze è nulla.
La risultante delle forze applicate agli altri due lati è diretta lungo *x* ed è

$$F_x = [-B(x+L) + B(x)]\, L\, i = -i\, a\, L^2 = -a^2\, L^4\, v\, /R$$

L'equazione del moto della spira è allora

$$F_x = M\, dv/dt = -a^2\, L^4\, v\, /R$$

Questa equazione si risolve separando le variabili. A tal scopo poniamo $\boldsymbol{\tau} = (m\, R) / (a^2\, L^4)$

ed otteniamo

$$dv\, /v = -\, dt\, /\, \tau$$

ed integrando si ha

$$v = v_o\, e^{-\, t/\tau}$$

b) Ricaviamo l'espressione esplicita dell'andamento della corrente elettrica nel tempo

$i = -\left(a^2 \; L^4 \; / R \right) v_o \, e^{-t/\tau}$

da cui possiamo dedurre la carica elettrica

$Q = \int_o^{\infty} |i\,(t)\,|dt = (m\, v_o) / (a\, L^2) \;\; = 1.2 \;\; C$

Esercizio 4

a) La frequenza è legata alla lunghezza d'onda dalla relazione:

$$\nu = c/\lambda = 4.7 \;\; 10^{14} \;\; Hz$$

b) Poiché si tratta di un'onda piana, **B** deve essere perpendicolare a **E** e alla direzione di propagazione, quindi **B** è diretto secondo l'asse z. Il suo modulo è dato dalla relazione:

$$B = \frac{E}{c} = 1.6 \;\; 10^{-4} \;\; T$$

c) L'intensità dell'onda è il valor medio del vettore di Poynting:

$$I = \frac{E \;\; B}{2\mu_o} = 3.3 \;\; 10^6 \;\; W\,/\,m^2$$

La potenza media è data dalla relazione

$$P = I \; A_{fascio} = 65.1 \text{ W}$$

dove A_{fascio} è l'area del fascetto laser.

d) La base del cilindro, perfettamente riflettente, è sottoposta a una pressione di radiazione:

$$P_{rad} = \frac{2I}{c} = 2.2 \;\;\; 10^{-2} N\,/\,m^2$$

Di conseguenza, la forza esercitata sul cilindro è pari a $F_{rad} = P_{rad} \;\; A$, avendo indicato con A l'area della base del cilindro. Affinché il cilindro resti in equilibrio, tale forza deve eguagliare la forza peso data da $F_{peso}=A \;\; H \;\; \rho \;\; g$ essendo g l'accelerazione di gravità. Dall'eguaglianza delle due forze si trova:

$$H = \frac{2I}{c \;\; g \;\; \rho} = 0.8 \;\; \mu m$$