Prova scritta di Elettricità e Magnetismo ed Elettromagnetismo A.A. 2006/2007

2 Luglio 2007

(Proff. F. Lacava, C. Mariani, F. Ricci, D. Trevese)

Modalità

- Recupero I^o esonero di Elettromagnetismo: Esercizio 3 (2 ore)
- Recupero II^o esonero di Elettromagnetismo: Esercizio 4 (2 ore)
- Prova scritta di Elettromagnetismo: Esercizi 3 e 4 (3 ore)
- Prova scritta di Elettricità e Magnetismo: Esercizi 1 e 2 (3 ore)
- Prova scritta di Elettricità e Magnetismo e di Elettromagnetismo: Esercizi 2, 3 e 4 (4 ore)

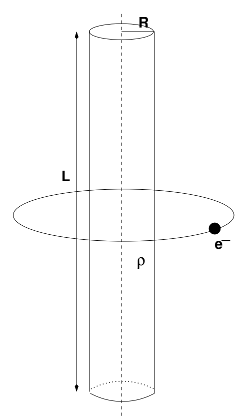
Esercizio 1

In una regione di spazio a simmetria cilindrica, di raggio R = 1 cm e di lunghezza L>>R, è presente una densità di carica uniforme ρ = 8.85 x 10^{-8} C/m^3. In orbita circolare intorno alla regione cilindrica, coplanare con la sezione circolare del cilindro stesso e a distanza trascurabile rispetto all'altezza del cilindro (vedi figura), si trova un elettrone (massa m=9.1 x 10^{-31} kg, carica |q| = 1.6 x 10^{-19} C).
Determinare:

a) l'espressione del campo elettrostatico **E** in funzione della distanza r dall'asse della regione cilindrica ed il suo valore sulla superficie cilindrica;

b) la velocità dell'elettrone in orbita intorno alla regione cilindrica (trascurandone la forza peso e l'irraggiamento);

c) l'energia elettrostatica per unità di lunghezza L, contenuta nella regione di spazio cilindrica.



Esercizio 2

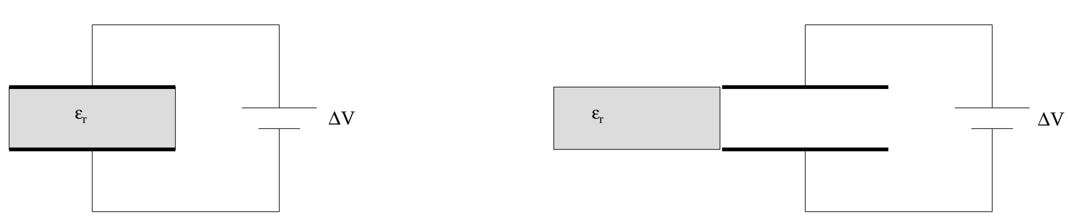
Un condensatore piano con armature quadrate di lato l = 10 cm distanti d = 1 cm è collegato ad un generatore di tensione $\Delta V = 6.0 \cdot 10^2$ V. Una lastra di materiale dielettrico ($\epsilon_r = 4$) occupa totalmente il volume tra le lastre del condensatore (figura 1). Tale lastra dielettrica viene quindi estratta dal condensatore (figura 2).
Determinare:

a) la densità superficiale di carica σ sulle lastre del condensatore e la densità di carica di polarizzazione σ_p sulla superficie del dielettrico quando questo è inserito nel condensatore (figura 1);

b) la differenza di energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore tra la situazione finale senza lastra (figura 2) e quella iniziale con lastra (figura 1);

c) la forza che bisogna applicare per estrarre la lastra;

d) il lavoro fatto per estrarre la lastra dielettrica, discutendone la relazione con la quantità trovata al punto *b*).



1 2

Esercizio 3

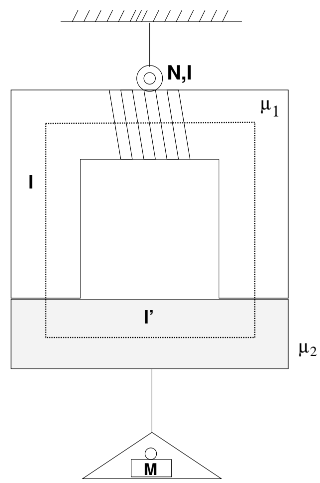
Un elettromagnete a forma di ferro di cavallo di lunghezza media $l = 30\ cm$ e sezione costante $S = 4\ cm^2$, è costituito da materiale ferromagnetico con ciclo di isteresi stretto: permeabilità magnetica relativa $\mu_{r1} = 10^3$ che può essere assunta costante in un ampio intervallo di valori di **B** e **H**, e da un circuito di eccitazione costituito da $N = 100$ spire percorse dalla corrente costante $I = 5\ A$. Il ferromagnete è sospeso tramite un filo inestensibile, ed attira una sbarretta di lungezza media $l' = 10\ cm$, di materiale ferromagnetico con permeabilit''a magnetica relativa $\mu_{r2} = 500$ costante, con stessa sezione S del magnete in modo da chiudere perfettamente il circuito magnetico. Alla sbarretta è collegato tramite un secondo filo inestensibile un piatto di massa trascurabile (vedi figura) sul quale può essere posta una massa M.
Determinare:

a) il valore della riluttanza del circuito magnetico;

b) il valore del campo di induzione magnetica **B** all'interno della sbarretta quando questa è attaccata all'elettromagnete;

c) l'energia magnetica totale del sistema;

d) il valore minimo della massa M che bisogna porre sul piatto per provocare il distacco della sbarretta dall'elettromagnete.



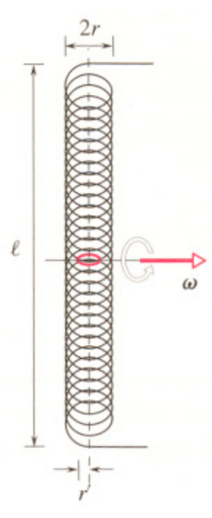
Esercizio 4

Si abbia un solenoide di lunghezza $l = 2\ m$ e resistenza trascurabile, composto da $N = 50000$ spire circolari di raggio $r = 1\ cm$, ed una spira coassiale posta nella parte centrale del solenoide di raggio $r' = 1\ mm$. La spira ruota con velocità costante pari ad un giro al secondo intorno ad un suo diametro ed è percorsa da una corrente costante $I = 2\ A$. Al tempo $t = 0\ s$ la normale alla spira è parallela alla direzione dell'asse del solenoide.
Determinare:

a) l'espressione del coefficiente di mutua induzione tra spira e solenoide;

b) la forza elettromotrice indotta nel solenoide dopo che la spira ha effettuato un quarto di giro;

c) connettendo i due capi del solenoide, nel circuito (di resistenza trascurabile) che si viene a creare si osserva il passaggio di una corrente. A regime la corrente può essere rappresentata nella forma $i(t) = i_{max} \sin(\omega t + \phi)$. Determinare il valore di i_{max} e ϕ.



Soluzione Esercizio 1

a) trascurando il contributo al campo elettrico totale dato dall'elettrone orbitante, esaminiamo le tre regioni di spazio 0<r<R, r=R, r>R;

0<r<R:

Applichiamo il teorema di Gauss ad una superificie cilindrica coassiale ed interna al cilindro, di raggio generico r ed altezza h; per simmetria

$$\frac{q(r)}{\epsilon_0} = \frac{\rho\ \pi\ r^2\ h}{\epsilon_0} = \ E(r)\ 2\ \pi\ r\ h$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\rho\ r}{2\ \epsilon_o}\ \hat{r}$$

r=R:

$$E(R) = \frac{\rho\ R}{2\ \epsilon_o} = 50\ V/m$$

sulla superficie cilindrica

r>R: all'esterno della zona cilindrica, il campo può essere trattato come il campo generato da un filo rettilineo indefinito carico con densità lineare $\lambda = \pi\rho\ R^2 = 2.78 \cdot 10^{-11}\ C/m$:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} = \frac{\rho\ R^2}{2\ \epsilon_0\ r}\hat{r}$$

b) per l'equilibrio fra la forza centripeta e quella elettrostatica nella generica orbita di raggio r_0,

$$F_c = \frac{mv^2}{r_0} = |q|E(r_0) \rightarrow \frac{mv^2}{r_0} = |q|\frac{\rho R^2}{2\ \epsilon_0 r_0}$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{|q|\ \rho\ R^2}{2\ m\ \epsilon_0}} = 2.97 \cdot 10^5\ m/s$$

c) l'energia elettrostatica contenuta in un volume τ del cilindro, di raggio R ed altezza L è:

$$U = \int d\tau\ \frac{1}{2}\ \epsilon_0\ E^2 =\ \frac{1}{2}\ \epsilon_0 \int (\frac{\rho\ r}{2\ \epsilon_0})^2\ L 2\pi r\ dr =$$

$$= \frac{\pi\ \rho^2\ L}{4\ \epsilon_0} \int_0^R r^3\ dr = \frac{\pi\ \rho^2\ L}{16\ \epsilon_0}\ R^4$$

infine, l'energia elettrostatica per unità di lunghezza L è

$$\frac{dU}{dL} = \frac{\pi\ \rho^2}{16\ \epsilon_0}\ R^4 = 1.74 \cdot 10^{-12}\ J/m.$$

Soluzione Esercizio 2

a) Nella situazione iniziale con la lastra dielettrica inserita la capacità del condensatore è $C_1 = \epsilon_o \epsilon_r l^2/d$, per cui la densità di carica sulle lastre è

$$\sigma = \frac{Q}{l^2} = \frac{C_1 \Delta V}{l^2} = \frac{\epsilon_o \epsilon_r \Delta V}{d} \simeq \ 2.1 \cdot 10^{-6} \ \mathrm{C/m^2} \ .$$

Il campo elettrico nel condensatore è $E = \sigma/\epsilon_o \epsilon_r$, per cui si ottiene la densità superficiale di cariche di polarizzazione

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \epsilon_o \chi E = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma = \frac{\epsilon_o (\epsilon_r - 1) \Delta V}{d} \simeq \ 1.6 \cdot 10^{-6} \ \mathrm{C/m^2} \ .$$

---

b) Usando l'espressione per l'energia del condensatore $U^{(cond.)} = C \Delta V^2/2$ e le capacità nello stato iniziale con lastra $C_1 = \epsilon_o \epsilon_r l^2/d$ e in quello finale senza lastra $C_2 = \epsilon_o l^2/d$, si ottiene

$$\Delta U^{(cond.)} = U_2^{(cond.)} - U_1^{(cond.)} = -\frac{\epsilon_o (\epsilon_r - 1) l^2 \Delta V^2}{2d} \simeq - \ 4.8 \cdot 10^{-6} \ \mathrm{J} \ .$$

---

c) La forza che bisogna applicare per estrarre la lastra è opposta alla forza elettrica che risucchia la lastra all'interno del condensatore. Quest'ultima si ottiene derivando l'energia del condensatore (col segno $+$, tenendo conto del fatto che viene mantenuta costante la differenza di potenziale con un generatore) in funzione del tratto x di lastra inserita. Poichè quando la lastra è inserita di un tratto generico x all'interno del condensatore la capacità di questo è $C(x) = (\epsilon_o l/d)[x(\epsilon_r - 1) + l]$ e l'energia è $U^{(cond.)} = C \Delta V^2/2$, si ottiene per la forza

$$F_{el} = +\frac{dU^{(cond.)}}{dx} = \frac{\epsilon_o (\epsilon_r - 1) l \Delta V^2}{2d} \simeq \ 4.8 \cdot 10^{-5} \ \mathrm{N} \ ,$$

costante, indipendente da x.

---

d) Il lavoro fatto per estrarre la lastra è ($\mathbf{F} = -\mathbf{F_{el}}$):

$$\mathcal{L} = Fl = \frac{\epsilon_o (\epsilon_r - 1) l^2 \Delta V^2}{2d} \simeq \ 4.8 \cdot 10^{-6} \ \mathrm{J} \ .$$

Si osservi che si ha $\mathcal{L} = -\Delta U^{(cond.)} = U_1^{(cond.)} - U_2^{(cond.)}$, ricavato al punto *b*). Il segno meno rispetto all'usuale espressione $\mathcal{L} = \Delta U^{(tot)}$ è dovuto al fatto che è presente il generatore e quindi l'energia totale non corrisponde alla sola energia del condensatore. Si ha pertanto

$$\mathcal{L} = \Delta U^{(tot.)} = U_2^{(tot.)} - U_1^{(tot.)} = -\Delta U^{(cond.)} = U_1^{(cond.)} - U_2^{(cond.)} \ ,$$

avendo scritto $\Delta U^{(tot.)} = \Delta U^{(cond.)} + \Delta U^{(gen.)}$ e tenenedo conto che la variazione di energia del generatore è $\Delta U^{(gen.)} = -2 \Delta U^{(cond.)}$.

Soluzione Esercizio 3

a)
Il circuito magnetico è costituito da due elementi magnetici posti in serie, per cui la riluttanza totale sarà data dalla somma della riluttanza dell'elettromagnete più la riluttanza della sbarretta. Indicando rispettivamente con il pedice 1 le grandezze relative all'elettromagnete e con il pedice 2 quelle relative alla barretta, avremo:

$$R = R_1 + R_2 = \frac{l}{\mu_0 \mu_{r1} S} + \frac{l'}{\mu_0 \mu_{r2} S} = \frac{[l\mu_{r2} + l'\mu_{r1}]}{S\mu_0 \mu_{r1} \mu_{r2}} = 9.9 \cdot 10^5 \ H^{-1}.$$

b)
Applicando il teorema della circuitazione di Ampere:

$$NI = \int \overrightarrow{H} \cdot d\overrightarrow{l} = H_1 \ l + H_2 \ l'$$

In approssimazione di circuito magnetico e considerato che tutti gli elementi sono di pari sezione il campo di induzione magnetica B è costante in tutti gli elementi del circuito, da cui:

$$B_1 = \mu_0 \mu_{r1} H_1 = B_2 = \mu_0 \mu_{r2} H_2 = B$$

da cui:

$$NI = \frac{lB}{\mu_0 \mu_{r1}} + \frac{l'B}{\mu_0 \mu_{r2}}$$

e quindi:

$$B = \frac{NI\mu_0 \mu_{r1} \mu_{r2}}{[l\mu_{r2} + l'\mu_{r1}]} = 1.26 \ T.$$

c)
Dalla definizione di energia magnetica abbiamo:

$$U_M = \int_{elmag} u_M(elmag) d\tau + \int_{sbarr} u_M(sbarr) d\tau$$

con:

$$u_M(elmag) = \frac{1}{2} B \cdot H_1$$
$$u_M(sbarr) = \frac{1}{2} B \cdot H_2.$$

Risulta quindi:

$$U_M = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_{r1}} lS + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_{r2}} l'S == \frac{N^2 I^2 S \mu_0 \mu_{r1} \mu_{r2}}{2[l\mu_{r2} + l'\mu_{r1}]} = 0.126 \ J.$$

d)
Immaginando uno spostamento (virtuale) x della sbarretta rispetto all'elettromagnete, l'energia magnetica totale U_M diviene:

$$U_M = \frac{1}{2} \frac{B'^2}{\mu_0 \mu_{r1}} lS + \frac{1}{2} \frac{B'^2}{\mu_0 \mu_{r2}} l'S + \frac{1}{2} \frac{B'^2}{\mu_0} 2xS$$

in cui si è indicato con B' il nuovo valore del campo di induzione magnetica (circuito magnetico precedente con due traferri, ciascuno di spessore x, tra sbarretta ed espansioni polari dell'elettromagnete. B' può essere calcolato in modo analogo al caso precedente (punto (b)), ottenendo:

$$NI = \int \overrightarrow{H} \cdot d\overrightarrow{l} = H_1 \; l + H_2 \; l' + H_0 \; 2x$$

$$B_1 = \mu_0 \mu_{r1} H_1 = B_2 = \mu_0 \mu_{r2} H_2 = B_0 = \mu_0 H_0 = B'$$

per cui:

$$NI = \frac{lB'}{\mu_0 \mu_{r1}} + \frac{l'B'}{\mu_0 \mu_{r2}} + \frac{2xB'}{\mu_0}$$

$$B' = \frac{NI\mu_0 \mu_{r1} \mu_{r2}}{[l\mu_{r2} + l'\mu_{r1} + 2x\mu_{r1}\mu_{r2}]}.$$

Sostituendo B' nell'espressione dell'energia magnetica totale si ottiene:

$$U_M(x) = \frac{N^2 I^2 S \mu_0 \mu_{r1} \mu_{r2}}{2[l\mu_{r2} + l'\mu_{r1} + 2x\mu_{r1}\mu_{r2}]}.$$

Poichè siamo in condizioni di corrente costante, la forza di distacco della sbarretta sarà data da:

$$F_M = (+\frac{\partial U_M}{\partial x})_{x=0} = -\frac{N^2 I^2 S \mu_0 \mu_{r1}^2 \mu_{r2}^2}{[l\mu_{r2} + l'\mu_{r1}]^2} = -502.7 \; N$$

la massa minima M che provoca il distacco della sbarretta risulta quindi essere:

$$M = \frac{|F_M|}{g} = \frac{N^2 I^2 S \mu_0 \mu_{r1}^2 \mu_{r2}^2}{g[l\mu_{r2} + l'\mu_{r1}]^2} = 51.3 \; Kg.$$

Soluzione Esercizio 4

a) Per derivare l'espressione del coefficiente di mutua induzione M è conveniente prendere come punto di partenza il flusso sulla superficie delimitata dalla spira di un campo di induzione magnetica, $\mathbf{B}'$, che sarebbe generato se circolasse una corrente i' nel solenoide. Questo ovviamente dà lo stesso risultato (ma si calcola con maggiore facilità) della derivazione del coeeficiente di mutua induzione basata sul flusso sulla superficie delimitata dal solenoide del campo di induzione magnetica generato dalla corrente I che circola nella spira.

Il campo $\mathbf{B}'$ generato se circolasse una corrente i' nel solenoide ha modulo $B' = \mu_0 i' N/l$ ed è diretto lungo l'asse del solenoide. Il flusso di questo campo sulla superficie delimitata dalla spira sarà uguale al prodotto del coefficiente di mutua induzione per la corrente i':

$$\mu_0 i' \frac{N}{l} \pi r'^2 \cos(\omega t) = M i'$$

dove si è tenuto conto della dipendenza temporale (dovuta alla rotazione della spira) del prodotto scalare tra il campo $\mathbf{B}'$ e la normale alla spira. Quindi per M si ottiene

$$M = \mu_0 \frac{N}{l} \pi r'^2 \cos(\omega t)$$

b) Avendo stabilito l'espressione del coefficiente di mutua induzione il flusso del campo di induzione magnetica generato dalla corrente I sul solenoide si può calcolare come $\Phi = MI$ e quindi per la forza elettromotrice si trova

$$f_{em}(t) = -\frac{d}{dt}\left(\mu_0 \frac{N}{l} \pi r'^2 I \cos(\omega t)\right) = \mu_0 \frac{N}{l} \pi r'^2 \omega I \sin(\omega t) \tag{1}$$

Per la forza elettromotrice indotta nel solenoide dopo che la spira ha effettuato un quarto di giro ($\omega t = \pi/2$) si trova quindi

$$[f_{em}]_{\omega t = \pi/2} = \mu_0 \frac{N}{l} \pi r'^2 \omega I = 1.24 \cdot 10^{-6} V$$

c) L'equazione differenziale che permette di determinare l'espressione della corrente che circola nel solenoide ha in generale la forma

$$Ri = -L\frac{di}{dt} + f_{em}(t)$$

denotando con R la resistenza del solenoide e con L il suo coefficiente di autoinduzione. Tale equazione differenziale ha a regime soluzione singolare sinusoidale del tipo:

$$i = i_{max} \sin(\omega t + \phi)$$

in cui:

$$i_{max} = \frac{f_{em}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$
$$\tan\phi = \frac{-\omega L}{R}.$$

Nel limite di resistenza trascurabile ($R \sim 0$) si ottiene quindi:

$$i_{max} = \frac{f_{em}}{\omega L}$$
$$\phi = -\frac{\pi}{2}$$

Osservando infine che, per il solenoide, $L = \mu_0 N^2 \pi r^2 / l$, e che (equazione 1): $f_{em} = \mu_0 \frac{N}{l} \pi r'^2 \omega I$, si ottiene:

$$i_{max} = \frac{r'^2}{N r^2} I = 4 \cdot 10^{-7}\ A.$$