Primo compito di esonero del Corso di Elettromagnetismo A.A. 2006/2007

25 Maggio 2007

(Proff. F. Lacava, C. Mariani, D. Trevese)

Esercizio 1

Una spira quadrata di lato $L = 20$ cm e resistenza $R = 4\ \Omega$ ruota con velocità angolare costante $\omega = 30$ rad/s intorno ad un suo lato (posto sull'asse z del sistema cartesiano). La spira è immersa in un campo di induzione magnetica diretto lungo y, $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{y}}$. Al tempo $t = 0$ il piano della spira si trova sul piano (x, z). Si trascurino gli effetti di autoinduzione.

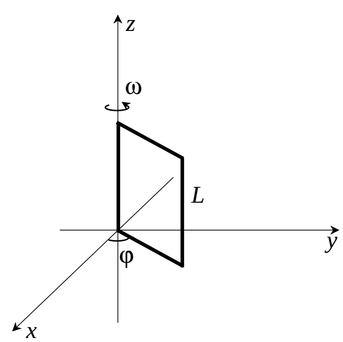
Nel caso in cui $\mathbf{B}$ sia uniforme e costante, di modulo $B = 0.5$ T, determinare

a) l'espressione in funzione del tempo della corrente indotta nella spira;

b) l'energia dissipata per effetto Joule dalla spira dopo aver compiuto un giro completo.

Nel caso in cui il campo B non sia uniforme, ma dipenda da x linearmente, $\mathbf{B} = \alpha x\hat{\mathbf{y}}$, con $\alpha = 2$ T/m, determinare

c) l'espressione in funzione del tempo della forza elettromotrice indotta nella spira, calcolandone il valore massimo.



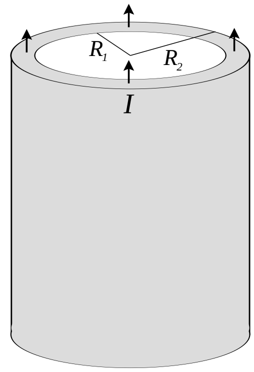
Esercizio 2

Una guaina cilindrica indefinita di materiale ferromagnetico omogeneo ed isotropo con $\mu_r = 50$, di raggio interno R_1 ed esterno R_2, è percorsa da una corrente uniforme $I = 4$ A parallela all'asse.
Si determini:

a) l'espressione del campo magnetico $\mathbf{H}$, del campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ e della magnetizzazione $\mathbf{M}$ in funzione della distanza radiale dall'asse del cilindro;

b) la corrente amperiana di volume (specificandone modulo, direzione e verso) presente nel materiale;

c) le correnti amperiane di superficie (specificandone modulo, direzione e verso) presenti sulla superficie interna ed esterna del materiale.



Soluzione Esercizio 1

Denotando con φ l'angolo tra il piano della spira e il piano (x,z) si ha $\varphi = \omega t$.

a) Applichiamo la legge di Faraday-Neumann $f_i = -d\Phi/dt$, dove Φ è il flusso del campo $\mathbf{B}$ attraverso l'area della spira

$$\Phi = BL^2 \cos(\varphi) = BL^2 \cos(\omega t)$$

si ottiene

$$i = \frac{f_i}{R} = \frac{BL^2\omega}{R} \sin(\omega t) \ .$$

b) L'energia dissipata per effetto Joule dalla spira dopo un giro è

$$\begin{aligned} W = \int_0^{T=2\pi/\omega} dt \ Ri^2 \ &= \frac{(\omega BL^2)^2}{R} \int_0^T dt \ \sin^2(\omega t) = \frac{\omega (BL^2)^2}{R} \int_0^{2\pi} d\varphi \ \sin^2(\varphi) = \\ &= \frac{\omega \pi B^2 L^4}{R} \simeq 9.42 \cdot 10^{-3} \ \mathrm{J} \end{aligned}$$

avendo usato $\int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2\varphi = \pi$ (come si evince facilmente usando la notazione complessa ovvero osservando che $\int(\cos^2 + \sin^2) = 2\pi$ e $\int \cos^2 = \int \sin^2$).

c) Nel caso non uniforme si ha:

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \ dS = \int_0^L dz \int_0^L dl \ \alpha x \cos(\varphi) = L\alpha \int_0^{L\cos\varphi} dx \ x = \frac{L^3\alpha}{2} \cos^2(\omega t)$$

avendo usato la relazione $dl \cos\varphi = dx$.
La forza elettromotrice indotta è pertanto

$$f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = L^3 \alpha\omega \cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{L^3\alpha\omega}{2} \sin(2\omega t)$$

Il valore massimo è

$$f_i^{(max)} = \frac{L^3\alpha\omega}{2} \simeq 0.24 \ \mathrm{V}$$

Soluzione Esercizio 2

La densità di corrente nel materiale è $J = I/[\pi(R_2^2 - R_1^2)]$.

a) Facendo uso del teorema della circuitazione di Ampère per $\mathbf{H}$, delle relazioni $\mathbf{B} = \mu_o\mu_r\mathbf{H}$, $\mathbf{M} = \chi_m\mathbf{H} = (\mu_r - 1)\mathbf{H}$ e tenendo conto della simmetria del problema (i campi sono tangenti alle circonferenze centrate sull'asse del cilindro), si ottiene:
per $r < R_1$

$$H = 0\ , \quad B = 0\ , \quad M = 0$$

per $R_1 < r < R_2$

$$\begin{aligned} H &= \frac{J(r^2 - R_1^2)}{2r} = \frac{I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right) \\ B &= \mu_o\mu_r H \\ M &= (\mu_r - 1)H \end{aligned}$$

per $r > R_2$

$$\begin{aligned} H &= \frac{I}{2\pi r} \\ B &= \mu_o H \\ M &= 0 \end{aligned}$$

b) Per la densità di corrente amperiana di volume si ha $\mathbf{J}_{a,v} = \nabla \times \mathbf{M} = \chi_m \nabla \times \mathbf{H} = \chi_m \mathbf{J}$ (avendo usato la IV equazione di Maxwell). Quindi la corrente amperiana di volume è

$$i_{a,v} = J_{a,v}\pi(R_2^2 - R_1^2) = \chi_m I = (\mu_r - 1)I \simeq 196 \text{ A}$$

con direzione parallela all'asse e stesso verso di I.

c) Le densità di corrente superficiale si ottiene dalla relazione $\mathbf{J}_{a,s} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$ (con $\hat{\mathbf{n}}$ normale uscente dalla superficie del materiale). Sulla superficie interna si ha $J_{a,s}^{(i)} = M(R_1) = 0$ e quindi $i_{a,s}^{(i)} = 0$, mentre sulla superficie esterna $J_{a,s}^{(e)} = M(R_2) = (\mu_r - 1)H(R_2)$ e quindi

$$i_{a,s}^{(e)} = J_{a,s}^{(e)} 2\pi R_2 = (\mu_r - 1)I \simeq 196 \text{ A}$$

con direzione parallela all'asse e verso opposto a I (e quindi a $i_{a,v}$).
Si noti che il contributo totale delle correnti amperiane è nullo (tenendo conto dei versi di percorrenza $i_a^{(tot)} = i_{a,v} - i_{a,s} = 0$), come ci si poteva aspettare considerando il teorema della circuitazione di Ampère per $\mathbf{B}$ lungo una circonferenza contenente il cilindro, $B2\pi r = \mu_o(I + i_a^{(tot)})$, e tenendo conto del fatto che all'esterno del cilindro $B = \mu_o I/2\pi r$.