Compito di esonero del corso di Elettromagnetismo del *17 Giugno 2011* **a.a 2010/2011**
Proff. S. Giagu, F. Lacava, F. Ricci

ESERCIZIO 1

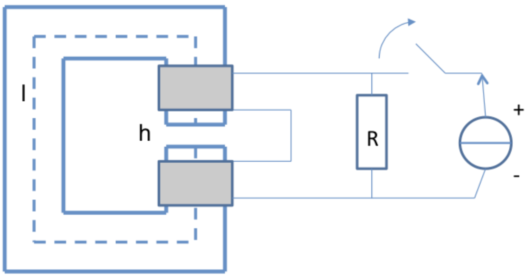
Un elettromagnete con permeabilità magnetica relativa $\mu_r = 1000$, con una lunghezza di 2 m e una sezione di area $S = 0.3\ m^2$ ha un traferro $h = 10\ cm$. Su ogni espansione polare sono avvolte $N = 100$ spire nelle quali circola una corrente costante $I_o = 1500\ A$. Le bobine, di resistenza trascurabile, sono poste in serie e sono alimentate in parallelo a una resistenza di $R = 10\ \Omega$ (vedi figura).

a) Si determini il campo B nel traferro.

b) Ad un certo istante l'interruttore C viene aperto: si determini in quanto tempo il campo B nel traferro decresce ad un valore pari a $(1/e)$ del suo valore iniziale.

c) Si determini l'energia totale dissipata nella resistenza.

Si trascurino gli effetti associati alle correnti parassite (correnti di Foucault) e al flusso magnetico disperso.



ESERCIZIO 2

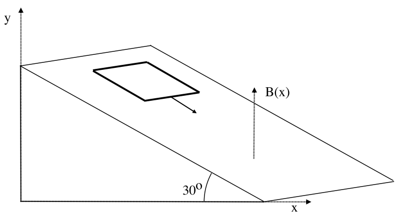
Una spira rigida, quadrata di lato $l = 10\ cm$, massa $m = 50\ g$ e resistenza incognita R è libera di scorrere lungo un piano inclinato di 30^o rispetto all'asse orizzontale x (vedi figura). La spira è immersa in un campo d'induzione magnetica $\vec{B}$ diretto come l'asse y che varia la sua intensità secondo la legge $B(x) = Kx$ con $K = 5\ T/m$. Al tempo $t = 0$ la spira viene lasciata scivolare lungo il piano e a $t = 10\ s$ la sua accelerazione è pari a 0.05 g dove g è l'accelerazione di gravità. Trascurando l'autoinduzione della spira, si chiede di ricavare:

a) L'andamento nel tempo della velocità della spira lungo il piano inclinato

b) La resistenza R della spira;

c) La velocità di regime della spira;

d) L'energia dissipata nella spira, a regime, per ogni centimetro di percorso.



SOLUZIONE

ESERCIZIO 1

a) Applichiamo il teorema della circuitazione di Ampère:

$$Hl + H_o h = 2NI_o = \frac{B}{\mu_o \mu_r} l + \frac{B}{\mu_o} h$$

da cui si ricava

$$B = \frac{2\mu_o \mu_r N I_o}{l + \mu_r h} = 3.7\ T$$

b) Calcoliamo l'Induttanza della bobina di N spire:

$$L = \frac{\Phi(B)}{I} = \frac{2NSB}{I} = \frac{\mu_o \mu_r 4N^2 S}{l + \mu_r h} = 0.15\ H$$

Quando l'interruttore si apre , l'equazione del circuito è:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = 0$$

Ne segue che la soluzione è:

$$I = I_o e^{-\frac{t}{\tau}}$$

dove $\tau = \frac{L}{R}$

Essendo B dipendente linearmente da I , ne segue che il tempo per cui il campo B nel traferro decresce ad un valore pari a $(1/e)$ del suo valore iniziale è proprio

$$\tau = \frac{L}{R} = 15\ ms$$

c)

L'energia dissipata è:

$$E_d = \int_o^\infty I^2 R dt = \frac{1}{2} L {I_o}^2 = 170\ \ kJ$$

ESERCIZIO 2

a) La componente lungo il piano inclinato della risultante delle forze applicate alla spira è:

$$F = mgsin\alpha - il(B_2 - B_1)cos\alpha$$

dove B_1 e B_2 sono i valori del campo magnetico lungo i punti dei lati superiore ed inferiore della spira. La loro differenza è :

$$B_2 - B_1 = Klcos\alpha$$

Il flusso del vettore $\vec{B}$ concatenato con la spira è

$$\Phi(\vec{B}) = \int_x^{x+lcos\alpha} K\ x\ l\ dx = \frac{1}{2}\ K\ l\big[(x + lcos\alpha)^2 - x^2\big] = \frac{1}{2}Kl\big[l^2cos^2\alpha + 2xlcos\alpha\big]$$

Indicando con v la velocità della spira lungo il piano ed essendo $\frac{dx}{dt} = vcos\alpha$, segue che

$$\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = Kl^2cos^2\alpha\ v$$

e la corrente i è

$$i = \frac{1}{R}\frac{d\Phi(B)}{dt} = \frac{1}{R}Kvl^2cos^2\alpha$$

L'accelerazione risultante a lungo il piano è:

$$a = \frac{dv}{dt} = gsin\alpha - \frac{1}{mR}K^2l^4cos^4\alpha\ v = gsin\alpha\big(1 - \frac{v}{v_o}\big)$$

dove

$$\frac{1}{v_o} = \frac{K^2l^4cos^4\alpha}{mRgsin\alpha}$$

L'equazione differenziale è risolvibile per separazione di variabile:

$$\frac{dv}{v_o\big(1 - \frac{v}{v_o}\big)} = \frac{gsin\alpha}{v_o}dt$$

ottenendo

$$v(t) = v_o(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

dove

$$\tau = \frac{v_o}{gsin\alpha}$$

b) La resistenza R si calcola imponendo che

$$0.05g = a^* = \frac{v_o}{\tau}e^{-\frac{t^*}{\tau}} = g\ sin\alpha\ e^{-\frac{t^*}{\tau}}$$

ottenendo quindi

$$\tau = t^*ln\frac{a^*}{gsin\alpha}$$

da cui si ha

$$R = t^*ln\big(\frac{a^*}{gsin\alpha}\big)\frac{K^2l^4cos^4\alpha}{m} = 0.12\ \Omega$$

c) La velocità limite è:

$$v_o = \frac{mRgsin\alpha}{K^2l^4cos^4\alpha} = 21\ \ m/s$$

d) L'energia dissipata a regime per ogni tratto percorso lungo il piano inclinato $\Delta s = 10^{-2}\ m$ è

$$E_d = i^2R\frac{\Delta s}{v_o} = \frac{1}{R}K^2v_o\Delta sl^4cos^4\alpha = 2.5\ \ mJ$$

È facile verificare, sostituendo nella formula precedente l'espressione esplicita della velocità v_o, che E_d è pari alla differenza di energia potenziale della spira ΔU:

$$\Delta U = mg\Delta ssin\alpha = 2.5\ \ mJ$$