Esame scritto di Elettromagnetismo del 4 Luglio 2011 - a.a. 2010-2011

proff. S. Giagu, F. Lacava, F. Ricci

Elettromagnetismo 10 o 12 crediti: esercizi 1,3,4 tempo 3 h e 30 min;

Elettromagnetismo 5 crediti: esercizio 3,4 tempo 2 h e 20 min;

Elettricitá e Magnetismo 5 crediti: esercizi 1,2, tempo 2 h, 20 min;

Recupero di un esonero: esercizi corrispondenti 1,3,4, tempo 1h e 20 min.

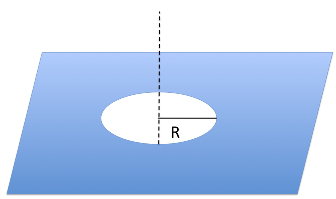
Esercizio 1

Si consideri un piano di materiale isolante, posizionato sul piano geometrico $x-y$, con un foro di raggio $R = 10\ cm$ centrato nell'origine degli assi. Sul piano viene depositata una carica positiva con densità $\sigma = 0.5\ C/m^2$

a) Si determini l'espressione del campo elettrico lungo tutto l'asse del foro (asse z);

b) Si calcoli poi la forza elettrostatica su un dipolo il cui momento ha modulo $p = 1 \cdot 10^{-10}\ Cm$ ed è orientato come l'asse z e vincolato nel punto $P = (0, 0, R)$;

c) Si determini la velocità finale del dipolo, la cui massa è pari a $m = 10\ g$ se viene rilasciato il vincolo che lo tiene inizialmente fermo (trascurando l'effetto della Gravitazione).



Esercizio 2

Una piccola spira circolare di raggio $a = 1\ mm$ si trova all'interno di un lungo solenoide avente un numero di spire per unità di lunghezza pari a $n = 50\ m^{-1}$. Il centro della spira giace sull'asse del solenoide, con il quale l'asse della spira forma un angolo $\theta = 30^o$. Nel solenoide passa la corrente $I = 0.2\ A$ e nella spira la corrente $I_a = 5\ mA$.

Si chiede di calcolare

a) il campo magnetico totale al centro della piccola spira, specificando la sua direzione rispetto all'asse del solenoide;

b) il momento risultante delle forze esercitato sulla spira nell'approssimazione in cui essa è trattata come un dipolo;

c) il momento risultante delle forze sulla spira nel caso in cui essa disti $d = 5.0\ cm$ da una estremità del solenoide, sapendo che la lunghezza totale del solenoide è pari a $L = 1.0\ m$ e il suo raggio $b = 5.0\ cm$.

Esercizio 3

Un elettromagnete ha lunghezza media complessiva $l = 101\ cm$ in cui è compreso un interferro di spessore $h = 10\ mm$ (magnete a forma di C). La sua sezione è $\Sigma = 100\ cm^2$. Un bobina di $N = 20\ spire$, percorsa da una corrente i, è avvolta sull'elettromagnete di nota curva di magnetizzazione. Trascurando il flusso disperso, si determini:

a) il valore della corrente i che deve circolare nelle spire affinchè si abbia nell' interferro un campo magnetico di modulo $B = 1.0\ T$ corrispondente ad un valore del campo H al suo interno pari a $H = 2040\ A/m$.

b) la forza di attrazione tra le espansioni del magnete, considerando in questo caso approssimativamente costante la permeabilità magnetica relativa del materiale.

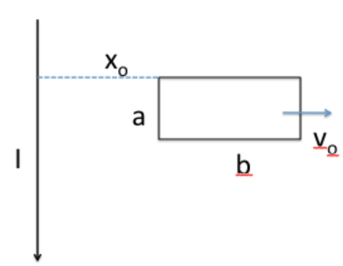
Esercizio 4

Sia dato un filo rettilineo di lunghezza infinita percorso da una corrente costante $I = 10\ mA$. Un secondo circuito è costituito da una bobina di $N = 10$ spire rettangolari indeformabili e compatte di lato $a = 2.0\ cm$ e $b = 3.0\ cm$, giacente nel piano contenente il filo (vedi figura). La resistenza elettrica della bobina sia $R = 2.0\ \Omega$. All'istante t = 0 la bobina rettangolare viene messa in moto con velocità costante $v = 3.0\ cm/s$ a partire dalla posizione $x_0 = 1.0\ cm$. Trascurando il coefficiente di autoinduzione della bobina, si determinino in funzione del tempo e quindi a $t = 3\ s$:

a) La corrente che circola nella bobina.

b) La forza che deve essere applicata alla bobina per mantenerla in moto a velocità costante.

c) La potenza dissipata per effetto Joule e la si paragoni con la potenza meccanica necessaria a mantenere il moto alla velocità costante v.



Soluzioni

Esercizio 1

Iniziamo calcolando il campo a distanza z dal piano prodotto da una piccola corona circolare compresa tra i raggi r e $r + dr$. Dobbiamo sommare vettorialmente i contributi al campo E dagli elementi di superficie $rdrd\varphi$. I contributi trasversi all'asse z si annullano tra loro per simmetria e rimane da sommare quindi solo le componenti di E lungo l'asse z:

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(r^2+z^2)} \frac{z}{(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \ \sigma rdrd\varphi = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{1}{(r^2+z^2)} \frac{z}{(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \ \sigma rdr$$

Sommando su tutte le corone circolari da R a ∞ otteniamo:

$$E(z) = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{z}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \ \sigma rdr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Il campo $E(z)$ è nullo per $z = 0$, è una funzione dispari di z, cresce con z e per $z \to \infty$ diventa, come da aspettarsi, $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ cioè il campo di uno strato carico (il foro a grande distanza è trascurabile).
La forza sul dipolo elettrico è:

$$\vec{F} = -\nabla U_d = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}) = (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E}$$

$$F_z = p\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\sigma p}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot \left(1 - \frac{z^2}{(R^2+z^2)} \right)$$

che si annulla all'infinito e per $z = R$ diventa:

$$F_z(R) = \frac{\sigma p}{8\epsilon_0} \frac{\sqrt{2}}{R} = 10 \quad N$$

Se non vincolato, il dipolo è soggetto a un'accelerazione positiva nel campo conservativo. La sua velocità si ricava dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$U_d(R) = \frac{1}{2}mv^2 + U_d(\infty) \qquad U_d(r) = -pE_z(r)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = pE_z(\infty) - pE_z(R)$$

$$v = \sqrt{\frac{p\sigma}{m\epsilon_0} \cdot \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} \right)} = 12,9 \quad m/s$$

Esercizio 2

a) Il campo al centro della spira è la composizione del campo associato al solenoide

$$\vec{B}_o = \mu_o n I_o \hat{k}$$

dove $\hat{k}$ è il versore nella direzione dell'asse del solenoide, e di quello della spira stessa

$$\vec{B}_{spira} = \mu_o \frac{I_s}{2a} \hat{n}$$

dove $\hat{n}$ è il vaersore normale alla superficie della spira che forma un angolo θ con l'asse del solenoide. Ne segue che il campo totale ha componenti dirette come l'asse del solenoide e perpendicolari ad esso:

$$\vec{B}_{tot} = \left(\mu_o n I_o + \mu_o \frac{I_s}{2a} \cos\theta \ ; \ \mu_o \frac{I_s}{2a} \sin\theta \right)$$

quindi

$$|\vec{B}_{tot}| = \left([\mu_o n I_o + \mu_o \frac{I_s}{2a} \cos\theta]^2 + [\mu_o \frac{I_s}{2a} \sin\theta]^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1.56 \cdot 10^{-5} \quad T$$

L' angolo d'inclinazione del vettore $\vec{B}_{tot}$ rispetto all'aesse del solenoide è

$$\alpha = arctang \left(\frac{\mu_o \frac{I_s}{2a} \sin\theta}{\mu_o n I_o + \mu_o \frac{I_s}{2a} \cos\theta} \right) = 0.102 \text{ `}rad$$

b) Il momento delle forze applicato alla spira è

$$|\vec{M}| = \mu_o \pi I_s a^2 n I_o \sin\theta = 9.4 \cdot 10^{-14} \quad Nm$$

c) Nel caso in cui la spira è spostata verso il bordo del solenoide il campo del solenoide ha u valore pari a:

$$B_o{}^{(b)} = \mu_o n I_o [\frac{L-d}{((L-d)^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{d}{(d^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}]$$

così che il momento delle forze diviene

$$|\vec{M}^{(b)}| = \pi I_s a^2 B_o{}^{(b)} \sin\theta = 2.89 \cdot 10^{-14} \quad Nm$$

Esercizio 3

a) Applichiamo il teorema della circuitazione di Ampère:

$$Ni = H(l-h) + \frac{B}{\mu_o}h$$

se ne deduce che

$$i = \frac{H}{N}(l-h) + \frac{B}{N\mu_o}h = 500 \quad A$$

b) La permebilità magnetica relativa nel punto di lavoro è:

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_o H} = 390$$

Applicando di nuovo il teorema della circuitazione d'Ampère ed eliminando il campo H utilizzando la permeabilità magnetica relativa μ_r, possiamo riscrivere il campo B nella forma

$$B = Ni\frac{\mu_o\mu_r}{l + x(\mu_r - 1)}$$

Scriviamo poi l'energia magnetica nel caso di un intraferro variabile $x \simeq h + \delta x$

$$E_M = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_o}\Sigma x + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_o\mu_r}\Sigma(l-x) = \frac{1}{2}\Sigma N^2 i^2 \frac{\mu_o\mu_r}{l + x(\mu_r - 1)}$$

Calcoliamo quind la forza F come derivata rispetto alla varian=bile x dell'energia magnetica, nell'ipotesi di permebilità magnetica relativa approssimativamente costante:

$$F = \left(\frac{dE_M}{dx}\right)_{x=h} = -\frac{1}{2}\Sigma N^2 i^2 \frac{\mu_o\mu_r(\mu_r - 1)}{[l + h(\mu_r - 1)]^2} = -3970 \text{ `}N$$

Esercizio 4

Il campo generato dal filo ad una distanza x è:

$$B(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}$$

Il flusso concatenato con le N spire in funzione di $x = vt + x_0$ è:

$$\Phi(x) = N\int_x^{x+b} aB(x)dx = \frac{\mu_0 aNI}{2\pi}log(\frac{x+b}{x}) = \frac{\mu_0 aNI}{2\pi}log\left(\frac{vt + x_0 + b}{vt + x_0}\right)$$

Nella bobina scorre quindi, in direzione oraria, la corrente:

$$i(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 aNI}{2\pi R}\left(\frac{v}{vt+x_0+b} - \frac{v}{vt+x_0}\right) = \frac{\mu_0 abNIv}{2\pi R}\left(\frac{1}{(vt+x_0+b)(vt+x_0)}\right)$$

Pet $t = 3$ s $i = 1,36 \cdot 10^{-11} \quad A.$
Sui tratti verticali della bobina agisce la forza:

$$F(t) = -Nai(t)B(x)+Nai(t)B(x+b) = -Nai(t)\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{(vt+x_0)} - \frac{1}{(vt+x_0+b)}\right)$$

$$F(t) = -\left(\frac{\mu_0 abNI}{2\pi}\right)^2 \frac{v}{R}\left(\frac{1}{(vt+x_0+b)(vt+x_0)}\right)^2$$

ed è quindi necessario applicare una forza esterna $F_{est}(t) = -F(t)$.
Per t = 3 s $F_{est}(t) = 1.28 \cdot 10^{-20} \quad N.$
La potenza meccanica applicata è:

$$W_{mecc} = F_{est}v = \left(\frac{\mu_0 abNIv}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{R}\left(\frac{1}{(vt+x_0+b)(vt+x_0)}\right)^2$$

e quella dissipata in effetto Joule:

$$W_R = Ri^2 = R\left(\frac{\mu_0 abNIv}{2\pi R}\right)^2 \left(\frac{1}{(vt+x_0+b)(vt+x_0)}\right)^2$$

che come da aspettarsi sono uguali. Per t = 3 s $\quad W = 3,82 \cdot 10^{-22} \quad W$