Compito d'esonero del corso di ELETTROMAGNETISMO
n. 2 - *15/04/2011 - a.a. 2010/2011*
proff. S. Giagu, F. Lacava, F. Ricci

ESERCIZIO 1

Una distribuzione di carica a simmetria cilindrica si estende sino ad una distanza dal suo asse pari a $R = 10$ cm. La densità di carica di volume ρ è variabile con la distanza r dall'asse della distribuzione secondo la legge

$$\rho = K \exp[-(\frac{r}{r_o})^2]$$

dove $r_o = 1.0$ cm.

a) Si determini il valore della costante K sapendo che la carica per unità di altezza complessiva della distribuzione è $\lambda = 0.3\ \mu$C/m

b) Si ricavi l'andamento dell'intensità del campo elettrico per $r < R$ ed $r > R$ e se ne calcoli il valore nel punto P posto a $r = 5.0$ cm dall'asse.

c) Si calcoli la differenza di potenziale tra i punti a distanza $r_1 = 20$ cm dall'asse e i punti sulla superficie del cilindro ($r = R$).

ESERCIZIO 2

Su un piccola sfera di raggio $R = 1.0$ mm è depositata una carica con densità di carica di volume $\rho(r, \theta) = \alpha\ r\ cos\theta$ dove α è costante e r e θ sono le variabili rappresentate in figura. La sfera è quindi per metà carica positiva e per l'altra metà carica negativa. Le cariche positiva e negativa sulle due semisfere sono in modulo pari a $Q = 1.0 \cdot 10^{-8}$ C. Si chiede

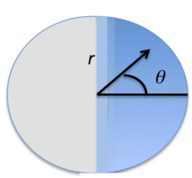
a) di determinare il momento di dipolo elettrico della sfera.

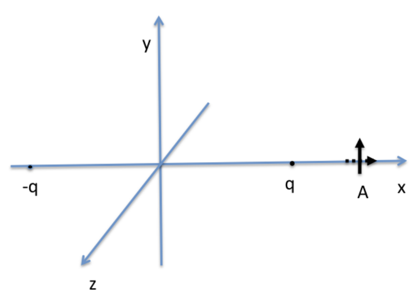
La sfera, col dipolo orientato nella direzione dell'asse y, viene posizionata nel punto A di coordinate $(a, 0, 0)$, con $a = 30$ cm, nel campo elettrico formato da una carica puntiforme $q = 1.0 \cdot 10^{-3}$ C posta nel punto $(d, 0, 0)$, con $d = 5.0$ cm, e da una carica $-q$ posta nel punto di coordinate $(-d, 0, 0)$.

b) Si determini il momento meccanico agente sulla sfera.

Mantenendo il dipolo nello stesso punto A, lo si disponga parallelo all'asse x .

c) In questa nuova orientazione del dipolo si determini il valore ed il segno della sola componente x della forza agente su di esso.





Soluzioni

Esercizio 1

a) La carica per unità di lunghezza λ è ricavabile calcolando in coordinate cilindriche l'integrale di volume di ρ da 0 a R

$$\lambda = \int_0^R \rho(r) 2\pi r dr = 2\pi K \int_0^R \exp[(-\frac{r}{r_o})^2] r dr$$

Imponendo la trasformazione $x = (\frac{r}{r_o})^2$ che implica $dx = \frac{2r}{r_0^2} dr$ l'integrale si riduce

$$\lambda = \pi K r_o^2 \int_0^{(R/r_o)^2} e^{-x} dx = \pi K r_o^2 \big[1 - exp[-(\frac{R}{r_o})^2\big]$$

Si ottiene quindi

$$K = \frac{\lambda}{\pi r_o^2} \frac{1}{\big[1 - exp[-(\frac{R}{r_o})^2\big]} = 9.6 \cdot 10^{-4} \quad C/m^3$$

b) Sfruttando la simmetria cilindrica della distribuzione di carica, ricaviamo il campo applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica coassiale con la distribuzione di carica di altezza unitaria e raggio $r < R$:

$$E\ 2\ \pi r = \frac{2\pi}{\epsilon_o} K \int_0^r \exp[-(\frac{r'}{r_0})^2] r dr$$

da cui si ricava, utilizzando la stessa variabile ausiliaria introdotta sopra

$$E = \frac{K}{2\epsilon_o r} r_o^2 \int_0^{((\frac{r}{r_o})^2} \exp[-x] dx$$

Esplicitando l'integrale e sostituendo l'espressione esplicita di K troveremo

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o r} \frac{\big[1 - exp[-(\frac{r}{r_o})^2\big]}{\big[1 - exp[-(\frac{R}{r_o})^2\big]} \qquad per \quad r < R$$

Sulla base di questa formula possiamo calcolare il modulo del campo elettrico del campo per $r = 5\ cm$, essendo questo valore inferiore a R:

$$E(r = 0.05) = 1.1 \cdot 10^5 \quad V/m$$

Applicando poi il teorema di Gauss ad una superficie con $r > R$ si ottiene

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o r} \qquad per \quad r > R$$

c) La differenza di potenziale ΔV tra i punti $r = R$ ed $r = r_1$ è deducibile utilizzando questa ultima espressione del campo elettrico, valida per $r > R$. Si ottiene

$$\Delta V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o}\int_{r_1}^{R}\frac{1}{r}dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o}\ln\big(\frac{r_1}{R}\big) = 3.7 \quad kV$$

Esercizio 2

La carica totale positiva (o negativa) depositata sul semidisco è:

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(r) r^2 dr d\varphi sin\theta d\theta = 2\pi \int_0^{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha r^3 cos\theta sin\theta dr d\theta = \frac{\pi}{4}\alpha R^4$$

e quindi:

$$\alpha = \frac{4}{\pi}\frac{Q}{R^4} = 1.3 \cdot 10^4 \quad C/m^4$$

.

Il momento di dipolo calcolato lungo l'asse di simmetria della carica è:

$$P = \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_0^{\pi} \rho(r) cos\theta r^3 dr sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^{R}\int_{-1}^{1} \alpha r^4 cos^2\theta d(cos\theta) dr = \frac{\alpha 4\pi R^5}{15}$$

e quindi

$$P = \frac{16}{15} QR = 1.1 \cdot 10^{-11} \quad C\ m$$

Il potenziale generato dalle due cariche q e $-q$ è:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{-q}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{q}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Il campo elettrico ha componenti:

$$E_{0x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{(x+d)}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{(x-d)}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$E_{0y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{y}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{y}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$E_{0z} = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{z}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{z}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

La componente x del campo nel punto A è pari a

$$E_{0x}(a,0,0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{[a-d]^2} - \frac{1}{[a+d]^2} \right) = \frac{qda}{\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{[a-d]^2 \cdot [a+d]^2} \right)$$

e quindi il momento delle forze agente sul dipolo orientato $\vec{P}(0,P,0)$ è:

$$\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E}_0 = -\frac{16}{15} \cdot \frac{QR}{\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{qda}{[a-d]^2 \cdot [a+d]^2} \right) \hat{z}$$

di modulo M pari a

$$M = 7.5 \cdot 10^{-4} \quad N\ m$$

La forza agente sul dipolo orientato $\vec{P}(P, 0, 0)$ ha non nulla la sola componente F_x:

$$F_x = (P_x \frac{\partial}{\partial x}) E_{0x} = \frac{qP}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{|a-d|^3} + \frac{1}{|a+d|^3} \right)$$

che, per l'orientamento assegnato di $\vec{P}$, risulta negativa:

$$F_x = -7.8 \cdot 10^{-3} \quad N$$