Prova scritta di Elettromagnesmo A.A. 2010/2011 - Appello straordinaria

9 Novembre 2011

(Proff. S. Giagu, F. Lacava, F. Ricci)

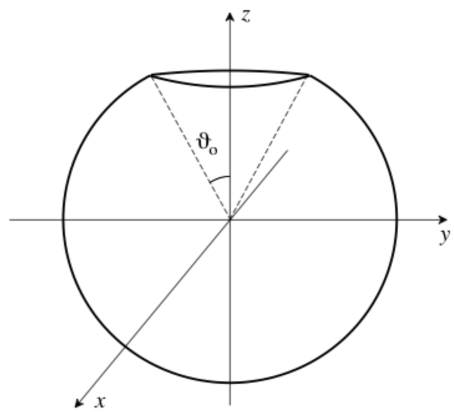
Esercizio 1

Da una superficie sferica isolante di raggio $R = 4$ cm carica con densità superficiale $\sigma = 2 \cdot 10^{-10}$ C cm^{-2} viene asportata simmetricamente rispetto all'asse z una parte di calotta, il cui bordo ha coordinata polare $\theta_o = \pi/6$ (vedi figura). Determinare:

a) il valore del potenziale V al centro della superficie sferica;

b) il campo elettrico **E** (in modulo, direzione e verso) al centro della superficie sferica;

c) la velocità asintotica raggiunta da una particella di massa m e carica q , con $q/m = 4 \cdot 10^{-4}$ C Kg^{-1}, posta inizialmente al centro della superficie sferica con velocità nulla.



Esercizio 2

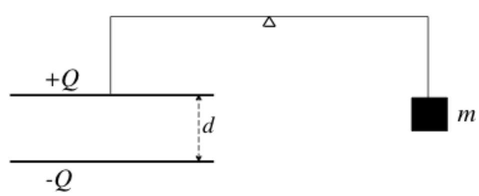
L'armatura superiore di un condensatore a facce quadrate di lato $l = 10$ cm è connessa al braccio di una bilancia. Il condensatore, carico ed isolato, viene inizialmente posto in aria e mantenuto in equilibrio ad una distanza $d = 0.1$ cm da una massa $m = 10$ g. Il condensatore viene quindi immerso in un liquido isolante di costante dielettrica relativa ϵ_r. Per mantenere l'equilibrio è necessario ridurre la massa sul piatto della bilancia al valore $m' = 4$ g. Si consideri inalterata la distanza d tra le armature.

Trascurando la massa dell'armatura del condensatore e la spinta di Archimede, determinare:

a) il valore della carica Q posseduta dal condensatore;

b) il valore della costante dielettrica relativa ϵ_r del liquido;

c) la variazione di d.d.p. tra le armature del condensatore tra le situazioni in aria e nel liquido.



Esercizio 3

Un condensatore piano ha le armature circolari di raggio $R = 10$ cm distanti $d_0 = 0.50$ mm l'una dall'altra. Tra le armature del condensatore viene mantenuta una d.d.p. costante pari a $V = 12$ V. A partire dall'istante $t = 0$ le armature sia allontanano con velocità relativa $v = 10$ m/s. Si chiede di calcolare:

a) Il valore massimo del modulo del vettore densità di corrente di spostamento.

b) Il modulo del campo di induzione magnetica B all'istante $t_0 = 50$ μs in un punto tra le armature del condensatore ad una distanza $h = R/2$ dall'asse di simmetria del sistema.

c) I contributi elettrico e magnetico all'energia del campo elettromagnetico presente tra le armature del condensatore all'istante t_0.

Soluzione Esercizio 1

a) Il potenziale al centro della sfera vale

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_o R}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta_o}^{\pi} d\theta \; R^2 \sin\theta = \frac{\sigma R}{2\epsilon_o}\int_{\theta_o}^{\pi} d\theta \;\sin\theta = \frac{\sigma R}{2\epsilon_o}(1+\cos\theta_o) \simeq \; 8.43\cdot 10^3 \text{ V} \; .$$

b) Data la simmetria del problema il campo elettrico $\mathbf{E}$ al centro della sfera è diretto lungo l'asse z nel verso positivo e vale

$$E = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_o R^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta_o}^{\pi} d\theta \; R^2 \sin\theta \;\cos\theta = \frac{\sigma}{4\epsilon_o}\sin^2\theta_o \simeq \; 1.41\cdot 10^4 \text{ Vm}^{-1} \; .$$

c) La velocità asintotica v si ottiene ugualgliando l'energia finale (cinetica) a quella iniziale (potenziale): $mv^2/2 = qV$, per cui:

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} \simeq \; 2.60 \text{ ms}^{-1} \; .$$

Soluzione Esercizio 2

a) La forza elettrostatica sull'armatura superiore del condensatore si ottiene derivando l'energia rispetto alla variabile x, distanza tra le armature: $F_e = -dU/dx$, con $U = Q^2/2C$ e $C = \epsilon_o l^2/x$. Si ottiene quindi $F_e = -Q^2/2\epsilon_o l^2$ (il segno meno indica che la forza è attrattiva). All'equilibrio tale forza uguaglia quella gravitazionale sulla massa m: $mg = |F_e|$. Il valore della carica Q è pertanto:

$$Q = l\sqrt{2\epsilon_o mg} \simeq \; 1.32\cdot 10^{-7} \text{ C} \; .$$

b) In presenza del dielettrico, la capacità del condensatore aumenta di ϵ_r e quindi la forza risulta $F'_e = -Q^2/2\epsilon_o\epsilon_r l^2$. All'equilibrio $m'g = |F'_e|$, da cui:

$$\epsilon_r = \frac{Q^2}{2\epsilon_o l^2 m' g} \simeq \; 2.51 \; .$$

c) La d.d.p. in aria è $\Delta V = Q/C = Qd/\epsilon_o l^2$, mentre in presenza del dielettrico $\Delta V' = Q/C' = Qd/\epsilon_o\epsilon_r l^2$. La variazione è pertanto

$$\Delta V' - \Delta V = -\frac{Qd(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_o\epsilon_r l^2} \simeq \; -8.97\cdot 10^2 \text{ V} \; .$$

Soluzione Esercizio 3

1.

$$E = \frac{V}{d(t)} \ , \quad d(t) = d_0 + vt$$

$$J = \epsilon_0 \left| \frac{\partial E}{\partial t} \right| = \frac{\epsilon_0 V v}{d^2(t)}$$

$$J_{max} = \frac{\epsilon_0 V v}{d_0^2} = 4.2 \text{ mA/m}^2$$

2. Dalla circuitazione di $\vec{B}$ su un percorso circolare (coassiale al condensatore) di raggio $r < R$ posto tra le due armature.

$$\oint \vec{B}(r,t) \cdot dl = 2\pi r B(r,t) = \mu_0 J \pi h^2 = \frac{\mu_0 \epsilon_0 V v \pi r^2}{d^2(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$B(h, t_0) = \frac{V v h}{2c^2 (d_0 + v t_0)^2} = 3.3 \ 10^{-11} \text{ T}$$

3.

$$u_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\epsilon_0 V^2}{2d^2(t_0)}$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{V^2 v^2 r^2}{8 d^4(t_0) c^4 \mu_0}$$

$$U_E = u_E \pi R^2 d(t_0) = 2.0 \ 10^{-8} \text{ J}$$

$$U_B = d(t_0) \int u_B 2\pi r dr = U_E \ \frac{1}{8} \left[\frac{v}{c} \ \frac{R}{d(t_0)} \right]^2 = 2.8 \ 10^{-20} \text{ J}$$