Secondo compito di esonero del corso di Elettromagnetismo A.A. 2010/2011

27 Maggio 2011

Proff. S. Giagu, F. Lacava, F. Ricci

ESERCIZIO 1

Un sistema è formato da due conduttori sferici concentrici. Il conduttore interno è pieno e ed ha raggio $a = 20.0$ cm, quello esterno è cavo ed ha raggio interno b= 30.0 cm ed esterno c= 35.0 cm. Lo spazio compreso tra i due conduttori è riempito da un dielettrico la cui constante dipende dalla distanza r dal centro secondo la relazione: $\epsilon(r) = \epsilon_0 + m(r - a)$ con $m = \epsilon_0/a$. Il conduttore interno ha carica $Q = 10.0$ nC, quello esterno è mantenuto a potenziale costante $V_0 = 500.0$ Volt.

Calcolare:

1. le cariche elettriche libere sulle tre superfici di raggio a, b e c;
2. le densità superficiali delle cariche di polarizzazione $\sigma_P(a)$ e $\sigma_P(b)$ presenti sulle superifici del dielettrico;
3. la densità volumica di carica di polarizzazione $\rho_P(r)$;
4. ad un dato istante il conduttore interno viene collegato a quello esterno, mantenendo inalterate le altre condizioni. Determinare i nuovi valori delle cariche sulle tre superfici conduttrici.

(Si ricordi l'espressione dell'operatore divergenza in coordinate sferiche:

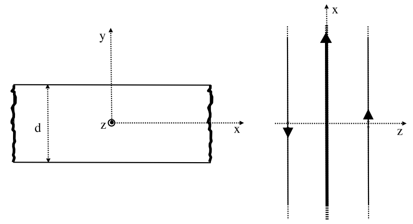
$$div\ \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\ sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(sen\theta A_\theta) + \frac{1}{r\ sen\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

con ovvio significato delle variabili).

ESERCIZIO 2

Una lama di materiale conduttore, molto sottile e lunga, di larghezza $\delta = 6.0$ cm, è percorsa da una corrente stazionaria $I = 4.5$ A, di densità uniforme in tutto il conduttore, che fluisce secondo il verso dell'asse x. Supponendo che la lama sia disposta nel piano xy, con l'origine equidistante dai suoi bordi, calcolare:

1. l'intensità del campo induzione magnetica B in un punto di coordinate $(0, 0, z)$ e dare il valore numerico per z= 10 cm;
2. l'intensità di corrente che dovrebbe scorrere in un filo rettilineo indefinito, disposto lungo l'asse x, per produrre lo stesso campo B alla stessa distanza;
3. la forza per unità di lunghezza tra la lamina e la coppia di fili infiniti e paralleli all'asse x, percorsi dalla stessa corrente I= 4.5 A ma con verso concorde a quello della lamina per il filo passante per il punto $(0, 0, z)$ e con verso opposto per il filo passante per il punto $(0, 0, -z)$. Si trovi il valore per z=10 cm.



Soluzione

Esercizio 1

1)

Sfruttando la simmetria sferica del sistema possiamo applicare il teorema di gauss per esprimere il campo elettrico $\vec{E}_o$ nello spazio vuoto per $b < r < \infty$,

Detta Q_{ext} la carica totale presente sul conduttore esterno si ha

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q+Q_{ext}}{r^2}$$

Essendo quindi il potenziale V_o pari a

$$V_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q+Q_{ext}}{c}$$

deduciamo

$$Q_{ext} = 4\pi\epsilon_o V_o c - Q$$

Poichè i due conduttori sono in condizione di induzione completa, la carica sulla superficie di raggio b sè uguale ed opposta alla carica presente sulla superficie di raggio a e quindi possiamo concludere che

- sulla superficie di raggio a vi è la carica $Q_a = Q = 10.0\ nC$,
- su quella di raggio b la carica $Q_b = -Q = -10.0\ nC$
- su quell di raggio c la carica $Q_c = Q_{ext} - (-Q) = 4\pi\epsilon_o V_o c = 19.5\ nC$

2)

Il vettore spostamento $\vec{D}$ nel dielettrico è deducibile dalla simmetria sferica del problema ed applicando il teorema di Gauss

$$D = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}$$

dalla definizione $D = \epsilon_o E + P$ ed essendo $E = \frac{D}{\epsilon(r)}$ si ha per il campo P

$$P = (1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(r)})\frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}$$

ovvero

$$P = (1 - \frac{a}{r})\frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}$$

Se ne deduce che

- $\sigma_p(a) = -P(a) = 0$
- $\sigma_p(b) = P(b) = (1 - \frac{a}{b})\frac{1}{4\pi}\frac{Q}{b^2} = 2.95 \cdot 10^{-9}\ C/m^2$

Infine per la densità di carica di volume avremo:

$$\rho_p(r) = -div\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2\ (1 - \frac{a}{r})\ \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}\right\} = -\frac{a}{4\pi}\frac{Q}{r^4}$$

3)

La connessione tra il conduttore esterno e l'interno rende equipotenziale tutto lo spazio sferico di raggio c. Ne segue che il campo elettrico in quel volume è nullo e le cariche sono disposte solo sulla superficie sferica esterna di raggio c. Si ha quindi

$$Q_a = Q_b = 0 \qquad Q_c = V_o 4\pi\epsilon_o c = 19.5 \;\; nC$$

Esercizio 2

1) La lamina percorsa dalla corrente I si può pensare costituita da tanti elementi rettilinei di filo di larghezza infinitesima dy percorsi dalla corrente $di = I\frac{dy}{\delta}$

Il campo magnetico associato a ciascuna di queste correnti è esprimibile tramite la legge di Biot e Savart. Poichè il punto in z è disposto lungo l'asse di simmetria della lamina, l'unica componente del campo diversa da zero è quella diretta come l'asse y. Quindi il campo in z è deducibile considerando tale componente

$$B_y(0,0,z) = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I}{\delta}\int_{-\delta/2}^{\delta/2}\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}dy = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I}{\delta}\int_{-\frac{\delta}{2z}}^{\frac{\delta}{2z}}\frac{1}{\frac{y^2}{z^2}+1}d(\frac{y}{z}) = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I}{\delta}\left\{arctang[\frac{\delta}{2z}] - arctang[-\frac{\delta}{2z}]\right\}$$

che, per $z' = 10\ cm$, risulta pari a $B_y(0,0,z') = 8.7\cdot 10^{-6}\ T$.

2)

Applichiamo di nuovo la legge di Biot e Savart ed imponiano la condizione

$$B_y(0,0,z') = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I'}{z'}$$

da cui deduciamo che

$$i' = \frac{2\pi}{\mu_o}z' B_y(0,0,z') = 4.4\ A$$

3)

La forza che la coppia di fili esercita sulla lamina è ottenibile applicando il principio di azione e reazione, calcolando la risultante delle forze che la lamina esercita sui due fili .

Ricordando che correnti fluenti nello stesso verso si attraggono e correnti con versi discordi si respingono, si deduce immediatamente che ciascun filo esercita sulla lamina una forza per unità di lunghezza nella direzione e con lo stesso verso dell'asse x. Essendo equidistanti i fili dalla lamina, il modulo della forza per unità di lunghezza è deducibile raddoppiando il valore della forza per unità di lunghezza che la lamina esercita su un filo:

$$\frac{dF}{dl} = 2IB_y(0,0,z') = 7.9\cdot 10^{-5}\ N$$