Esame scritto di Elettromagnetismo del 16 Luglio 2012 - a.a. 2011-2012

proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese

Elettromagnetismo 10 o 12 crediti: esercizi 1,2,3 tempo 3 h e 30 min;

Recupero di un esonero: esercizi corrispondenti 1,2,3, tempo 1h e 10 min.

Esercizio 1

Un corpo inizialmente neutro, costituito di un materiale isolante isotropo, si trova nel vuoto ed è immerso in un campo elettrico $\vec{E_o}$ di modulo $E_o = 3.5 \cdot 10^5\ V/m$ che in un punto A prossimo alla superficie forma un angolo $\theta_o = \frac{\pi}{6}$ con la direzione ad essa normale. In corrispondenza del punto A, immediatamente all'interno del corpo, tale angolo vale $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$. Successivamente il corpo viene caricato elettricamente per strofinio mentre il campo elettrico esterno in A viene mantenuto uguale in modulo, direzione e verso al campo iniziale $\vec{E_o}$.

Si determinino:

a) la costante dielettrica del materiale;

b) il campo elettrico e il vettore induzione all'interno del materiale quando il corpo è neutro;

c) l'andamento dell'angolo θ fra campo elettrico $\vec{E}$ all'interno del corpo e la normale alla superficie, in funzione della densità di carica σ ed il valore che θ assume per $\sigma^* = 6.2 \cdot 10^{-7}\ C/m^2$;

d) la densità superficiale di carica di polarizzazione σ_P in funzione di σ ed il valore che assume per $\sigma = \sigma^*$.

Esercizio 2

Un elettromagnete è costituito da un circuito magnetico di sezione circolare costante S e permeabilità magnetica relativa approssimabile con un valore costante $\mu_r = 200$. Esso presenta un traferro di spessore $d = 10\ cm$ e la lunghezza media nel materiale ferromagnetico è $l = 1\ m$. Sul materiale magnetico sono avvolte $N = 2000$ spire in cui viene fatta circolare una corrente alternata sinusoidale di ampiezza $I_o = 1.0\ A$ e frequenza $\nu = 628\ Hz$. Nel traferro è inserito un disco diamagnetico di resistività $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\ m$) di raggio $R = 1.5\ cm$ ($R < \sqrt{\frac{S}{\pi}}$) e spessore $h = 1.0\ cm$, posto in asse con le espansioni polari dell'elettromagnete.

Si calcoli:

a) Il campo elettrico indotto in un punto del piano del disco,in intensità e direzione in funzione della distanza dall'asse;

b) La densità di corrente $\vec{J}$ nel disco in funzione della distanza dall'asse, specificando intensità e direzione;

c) la potenza media per unità di volume dissipata per effetto Joule all'interno del disco, in funzione della distanza dall'asse;

d) la potenza media dissipata nell'intero disco.

Esercizio 3

Un'onda radio sinusoidale piana di frequenza $\nu = 1.5\ GHz$, polarizzata con il campo elettrico nella direzione dell'asse x, si propaga nel vuoto nella direzione dell'asse y. La sua intensità media è di $3.0 \cdot 10^{-2}\ W/m^2$. Per rivelare l'onda si fa uso di un'antenna costituita da una spira rettangolare giacente nel piano (x, y), con un lato di lunghezza a nella direzione di propagazione dell'onda ed uno di lunghezza b nella direzione dell'asse x.

Si determini:

a) l'espressione analitica delle componenti del campo elettrico e magnetico dell'onda in funzione dello spazio e del tempo;

b) il valore di picco dei campi elettrico e magnetico;

c) la forza elettromotrice indotta in funzione della lunghezza a della spira.

Soluzioni

Esercizio 1

a) In assenza di carica localizzata sulle superficie del dielettrico dalle I e III equazioni di Maxwell si deduce:

$$D_{on} - D_n = 0 \tag{1}$$

$$E_{ot} - E_t = 0 \tag{2}$$

dove i suffissi n e t indicano le componenti normali e tangenti alla superficie di separazione dei due mezzi Essendo il mezzo omogeneo e isotropo, si ha

$$\vec{D} = \epsilon_o \epsilon_r \vec{E}$$

e quindi dalle prime due equazioni deduciamo che

$$\epsilon_r = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_0} = 1.73$$

b) Dall'equazione (1), si deduce

$$E = E_0 \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_1} = 2.47 \cdot 10^5 \ V/m$$

da cui

$$D = \epsilon_o \epsilon_r E = 3.79 \cdot 10^{-6} \ C/m^2$$

c) In presenza di carica localizzata sulle superficie del dielettrico dalle I e III equazioni di Maxwell si deduce:

$$E_{ot} - E_t = 0$$

ovvero

$$D_t = \epsilon_r D_{ot}$$

$$D_{on} - D_n = \sigma$$

ovvero

$$D_n = D_{on} - \sigma$$

Calcolando il rapporto D_t/D_n si ottiene

$$\tan\theta_\sigma = \frac{D_t}{D_n} = \frac{\epsilon_r D_{ot}}{D_{on} - \sigma} = \epsilon_r \frac{\sin\theta_o}{\cos\theta_o - \frac{\sigma}{\epsilon_o E_o}}$$

che, per il valore assegnato di σ, ci porta a concludere

$$\theta_\sigma = 0.915 \ \ rad$$

d) Ricavato il valore del modulo di $\vec{E}$ dalla relazione

$$E = E_o \frac{\sin \theta_o}{\sin \theta_\sigma} = 9.56 \cdot 10^5 \ V/m$$

si ottiene immediatamente

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} = \epsilon_o(\epsilon_r - 1) E \cos \theta_\sigma = 1.40 \cdot 10^{-6} \ C/m^2$$

Esercizio 2

a) Per il teorema della circuitazione:

$$Hl + H_0 d = NI$$

con $\quad I = I_0 sen\omega t$. Inoltre sappiamo:

$$B = B_0 \qquad B = \mu H \qquad B_0 = \mu_0 H_0$$

quindi:

$$\frac{B}{\mu} l + \frac{B}{\mu_0} d = NI$$

$$\vec{B} = \frac{\mu NI}{l + \mu_r d} \hat{z}$$

che pensiamo uniforme sulla sezione del circuito magnetico. Scegliamo l'asse $\hat{z}$ coincidente con l'asse del disco.

Il disco è interamente posizionato nel campo $\vec{B}$ all'interno del traferro. Per la legge di Faraday-Neumann calcolando la circuitazione del campo E su una circonferenza con centro sull'asse del disco abbiamo:

$$2\pi r E = -\frac{d}{dt}\left(\pi r^2 B\right) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

dalla quale:

$$\vec{E} = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\ \hat{\varphi} = -\frac{r}{2}\frac{\mu N}{l + \mu_r d}\ \frac{dI}{dt}\ \hat{\varphi} = -\frac{r}{2}\frac{\mu N}{l + \mu_r d}\ I_0 \omega\ cos\omega t\ \hat{\varphi}$$

b) la densità di corrente da $\vec{E} = \rho \vec{J}$ diventa:

$$\vec{J} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = -\frac{r}{2\rho}\ \frac{\mu N}{l + \mu_r d}\ I_0\ \omega\ cos\omega t\ \hat{\varphi}$$

c) la potenza dissipata per unità di volume è:

$$w = \vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{1}{\rho} E^2 = \frac{1}{\rho}\left[\frac{r}{2}\frac{\mu N}{l + \mu_r d} I_0 \omega\right]^2 cos^2\omega t$$

e mediando sul periodo da $\overline{cos^2\omega t} = \frac{1}{2}$ si ottiene:

$$\overline{w} = \frac{1}{8\rho} r^2 \left[\frac{\mu N}{l + \mu_r d}\ I_0 \omega\right]^2$$

d) La potenza media dissipata nel disco è:

$$\overline{W} = \int_{Disco} \overline{w}\ d\tau = h \int_0^R \int_0^{2\pi} \overline{w}\ r\ d\varphi\ dr = \frac{1}{8\rho}\left[\frac{\mu N}{l + \mu_r d}\ I_0 \omega\right]^2 \frac{R^4}{4} 2\pi =$$

$$\frac{\pi}{16}\frac{h}{\rho}\left[\frac{\mu N}{l + \mu_r d}\ I_0\ \omega\right]^2 R^4 = 52\ W$$

Esercizio 3

Detto $\hat{k}$ il versore della direzione di propagazione dell'onda , si ha $\vec{B} = (\hat{k} \times \vec{E})/c$, $\vec{E} = c\vec{B} \times \hat{k}$.

a) Il campo elettrico e il campo magnetico dell'onda piana monocromatica sono

$$\vec{E} = E_0 \cos\left[\omega\left(\frac{y}{c} - t\right)\right]\hat{x}$$

$$\vec{B} = -B_0 \cos\left[\omega\left(\frac{y}{c} - t\right)\right]\hat{z}$$

con

$$B_0 = \frac{E_0}{c}$$

b) L'intensità media dell'onda è

$$\overline{I} = \frac{E_0^2}{2Z}, \quad Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

da cui le espressioni per i campi elettrico e magnetico

$$\vec{E} = \sqrt{2Z\overline{I}} \cos\left[\omega\left(\frac{y}{c} - t\right)\right]\hat{x}$$

$$\vec{B} = -\sqrt{\frac{2Z\overline{I}}{c^2}} \cos\left[\omega\left(\frac{y}{c} - t\right)\right]\hat{z}$$

con i valori di picco pari a

$$E_0 = \sqrt{2Z\overline{I}} = 4.76 \quad V/m \qquad\qquad B_0 = \sqrt{2Z\overline{I}/c^2} = 1.59 \cdot 10^{-8} \quad T$$

c) Il campo magnetico è sempre ortogonale alla superficie e varia con la posizione solo nella direzione y. Il flusso del campo magnetico è quindi, se Y è la posizione lungo y di uno dei lati b e X la posizione lungo x di uno dei lato a

$$\begin{aligned}
\phi\left(\vec{B}\right) &= -B_0 \int_X^{X+b} dx' \int_Y^{Y+a} \cos\left[\omega\left(\frac{y'}{c} - t\right)\right] dy' \\
&= -\frac{cB_0 b}{\omega}\left\{\sin\left[\omega\left(\frac{Y+a}{c} - t\right)\right] - \sin\left[\omega\left(\frac{Y}{c} - t\right)\right]\right\}
\end{aligned}$$

La derivata del flusso del campo magnetico cambiato di segno fornisce la f.e.m. indotta:

$$f = -\frac{d\phi}{dt} = -cB_0 b\left\{\cos\left[\omega\left(\frac{Y+a}{c} - t\right)\right] - \cos\left[\omega\left(\frac{Y}{c} - t\right)\right]\right\}$$

Si noti che, sulla base delle espressioni per il campo elettrico date sopra ed essendo $\vec{E}$ parallelo a $\hat{x}$, il secondo membro della precedente relazione può ottenuto facilmente anche calcolando la circuitazione del campo elettrico lungo la spira, ovvero:

$$f = -\frac{d\phi}{dt} = bE(y = Y) - bE(y = Y + a) = \oint_{spira} \vec{E}(y,t) \cdot d\vec{l}$$