Esame scritto di Elettromagnetismo del 19 Giugno 2012 - a.a. 2011-2012

proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese

Elettromagnetismo 10 o 12 crediti: esercizi 1,2,3 tempo 3 h e 30 min;

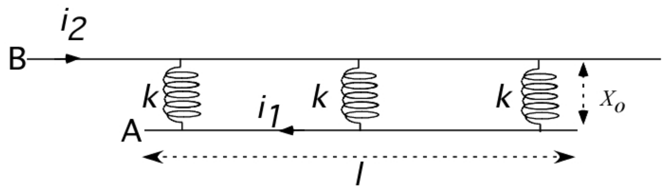
Recupero di un esonero: esercizi corrispondenti 1,2,3, tempo 1h e 10 min.

Esercizio 1

Un condensatore piano, costituito da due armature orizzontali di area $S = 1.2\ m^2$ distanti tra loro $h = 5.1\ cm$, è connesso ad un generatore di forza elettromotrice $f = 150\ V$. Tra le due armature si immette un liquido isolante di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 80$ sino ad un livello pari ad x. Si chiede di determinare:
a) l'espressione della capacità del condensatore in funzione di x;
b) le espressioni dell'intensità dei vettori $\vec{P}$, $\vec{E}$ e $\vec{D}$ in funzione di x;
c) il valore di x per il quale l'energia elettrostatica immagazzinata nella parte riempita di liquido è uguale a quella immagazzinata nella parte rimanente;
d) la pressione elettrostatica sull'armatura non bagnata dal liquido per il valore del livello $\bar{x}$ trovato al punto c).

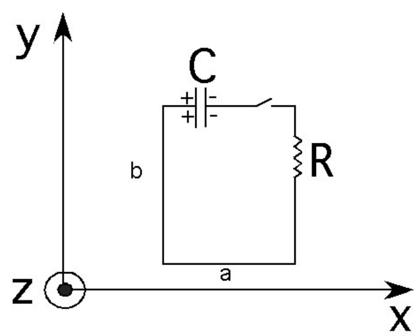
Esercizio 2

Un filo metallico rigido A di lunghezza l, è sospeso al disotto di un lungo filo rettilineo B tenuto in posizione fissa. La sospensione è realizzata con tre molle identiche ciascuna con costante elastica k (di lunghezza di riposo nulla). All'equilibrio tra il peso e la forza elastica di richiamo delle molle, la distanza tra i fili è x_o quando non passa corrente sia in A che in B.
a) Si calcolino le nuove posizioni di equilibrio x quando in A scorre la corrente i_1 e in B la corrente i_2 *con versi opposti.*
b) Si consideri ora il caso in cui le correnti i_1 e i_2 scorrono *con verso concorde* e si verifichi che, affinchè si possano realizzare condizioni di equilibrio, la distanza iniziale x_o deve essere maggiore di un valore di soglia x_{os}. Si determini tale valore.
Si assuma $i_1 = 4\ A$. $i_2 = 100\ A$, $k = 0.1\ N/m$, $l = 0.2\ m$, $x_o = 1.0\ cm$.



Esercizio 3

Un circuito elettrico, di massa complessiva $m = 10\ g$, è costituito da una spira rigida rettangolare di lati $a = 0.5\ m$ e $b = 1.0\ m$, e resistenza elettrica $R = 150\ \Omega$ posta in serie ad un condensatore di capacità $C = 100\ \mu F$.
La spira è libera di traslare senza attrito sul piano orizzontale x - y ed è inizialmente ferma con i lati di lunghezza a e b rispettivamente paralleli agli assi x e y (vedi figura).
La spira è immersa in un campo magnetico funzione della posizione $\vec{B} = (0, 0, Ax)$, dove $A = 0.2\ T/m$.
Il circuito è inizialmente aperto e la tensione ai capi del condensatore è $V_o = 1.0\ kV$, con il segno indicato in figura. Successivamente viene chiuso l'interruttore. Si determini:
a) la forza elettromotrice indotta nella spira in funzione della sua velocità;
b) come varia la corrente in funzione del tempo;
c) la velocità asintotica della spira in modulo, direzione e verso (specificando il valore numerico).
Si trascuri l'autoinduzione del circuito.



Soluzioni

Esercizio 1

a)

La capacità del condensatore C è la serie del condensatore formato dalla parte con il liquido e della restante parte in vuoto

$$C^{-1} = \frac{x}{\epsilon_o \epsilon_r S} + \frac{h-x}{\epsilon_o S}$$

da cui ricaviamo

$$C = \frac{\epsilon_o \epsilon_r S}{x + (h-x)\epsilon_r}$$

b) Il condensatore è connesso la generatore di forza elettromotrice f che quindi è pari alla differenza di potenziale tra le armature. Essendo $C = \frac{Q}{f}$, si ha:

$$Q = f\ C = f \frac{\epsilon_o \epsilon_r S}{x + (h-x)\epsilon_r}$$

Inoltre per il teorema di Gauss si ha:

$$|\vec{D}| = \frac{Q}{S} = f \frac{\epsilon_o \epsilon_r}{x + (h-x)\epsilon_r}$$

Poichè $|\vec{D}_o| = |\vec{D}|$ deduciamo che:

$$|\vec{E}| = \frac{D}{\epsilon_o \epsilon_r} = f \frac{1}{x + (h-x)\epsilon_r}$$

$$|\vec{P}| = \epsilon_o(\epsilon_r - 1)E = f \frac{\epsilon_o(\epsilon_r - 1)}{x + (h-x)\epsilon_r}$$

$$|\vec{E}_o| = \frac{D}{\epsilon_o} = f \frac{\epsilon_r}{x + (h-x)\epsilon_r}$$

Si noti che la differenza di potenziale è legata ai campi elettrici nel liquido E e nel vuoto E_o

$$f = \int_0^x E dx' + \int_x^h E_o dx' = Ex + E_o(h-x)$$

c) L'energia elettrostica totale è:

$$\mathcal{E}_{tot} = \int_\tau u d\tau' + \int_{\tau_o} u_o d\tau' = \frac{1}{2}\int_\tau \vec{D}\cdot\vec{E} d\tau' + \frac{1}{2}\int_{\tau_o} \vec{D}_o \cdot \vec{E}_o d\tau'$$

dove τ è il volume di liquido e τ_o quello vuoto. Imponendo l'eguaglianza dei due addendi otteniamo:

$$E\ D\ x = E_o D_o (h-x)$$

Poichè si ha:

$$D = D_o \qquad \frac{E_o}{\epsilon_r} = E$$

deduciamo:

$$\bar{x} = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} h = 5.0\ cm$$

d) Infine la pressione elettrostatica p_e sull'armatura non bagnata dal liquido è uguale alla densitá di energia elettrostatica $p_e = u_o$, che nella condizione del punto c) vale:

$$p_e = u_o(x = \bar{x}) = \frac{\epsilon_o f^2 (1+\epsilon_r)^2}{8h^2} = 6.2 \cdot 10^{-2}\ Pa$$

Esercizio 2

Il campo d'induzione magnetica $\vec{B}$ del filo percorso dalla corrente i_2 é:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi x}\hat{z}$$

essendo $\hat{z}$ il versore perpendicolare al piano dei due fili.

a)

Quando le due correnti i_1 e i_2 hanno verso discorde avremo:

$$mg - kx + \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{2\pi x} = 0$$

Per correnti nulle la condizione di equilibrio è $mg = 3kx_o$. Si ottiene, quindi:

$$3k(x_0 - x) + \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{2\pi x} = 0$$

$$x^2 - xx_0 - \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{6\pi k} = 0$$

Ne segue che:

$$x_{1,2} = \frac{x_0}{2} \pm \sqrt{(\frac{x_0}{2})^2 + \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{6\pi k}}$$

$$x_1 = 13.8\ mm \qquad\qquad x_1 = -3.9\ mm$$

b)

Quando le correnti sono concordi si ha:

$$x^2 - xx_0 + \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{6\pi k} = 0$$

da cui segue:

$$x_{1,2} = \frac{x_o}{2} \pm \sqrt{(\frac{x_o}{2})^2 - \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{6\pi k}}$$

Per ottenere soluzioni reali é necessario che:

$$(\frac{x_0}{2})^2 - \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{6\pi k} > 0$$

per cui si deve avere:

$$x_o > x_{0s} = \sqrt{\frac{2\mu_0 i_1 i_2 l}{3\pi k}} = 1.5\ cm$$

Esercizio 3

a)

Il circuito piano é immerso in un campo magnetico non uniforme perpendicolare ad esso. Quando l'interruttore é chiuso, la carica Q del condensatore diminuisce e circola la corrente:

$$i = -\frac{dQ}{dt}$$

. Nel campo magnetico non uniforme, il circuito é sottoposto ad una forza che lo mette in movimento. Di conseguenza, nel circuito é indotta la forza elettromotrice:

$$f_i = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\int_x^{x+a} bAx'dx'\right] = --\frac{d}{dt}\left[\frac{A}{b}[(x+a)^2 - x^2\right] = -Aabv \tag{1}$$

dove $v = \frac{dx}{dt}$.

b)

L'equazione del circuito all'istante generico é:

$$\frac{Q}{C} + f_i = iR$$

Sostituendo la (1) e fifferenziando si ottiene:

$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = Aab\frac{dv}{dt} \tag{2}$$

Poiché l'unica componente diversa da zero della forza é quella parallela all'asse x:

$$F_x = biA(x+a) - biAx] = iAab$$

, l'equazione del moto del circuito, $F_x = ma_x$, si scrive:

$$iAab = m\frac{dv}{dt}$$

che sostituita nell'equazione del circuito (2) ci porta a scrivere:

$$\frac{di}{dt} + i\left(\frac{1}{RC} + \frac{A^2a^2b^2}{mR}\right) = 0$$

Definiamo la costante di tempo caratteristica del circuito

$$\tau_c = \left[\frac{1}{RC} + \frac{A^2a^2b^2}{mR}\right]^{-1}$$

e ricaviamo la soluzione dell'equazione differenziale nella forma:

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{\tau_c}} = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau_c}} =$$

dove abbiamo riconosciuto che $i(t=0) = i_0 = \frac{V_0}{R}$.

c)

L'andamento della velocità nel tempo si ricava dall'equazione del moto

$$\frac{dv}{dt} = i\frac{Aab}{m} = \frac{Aab}{m}\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau_c}}$$

Integrando nell'intervallo $[0, t^*]$ l'equazione precedente otteniamo

$$v = \frac{\tau_c V_0 Aab}{mR}\left[1 - e^{-\frac{t^*}{\tau_c}}\right]$$

il cui valore asintotico è:

$$V_\infty = \frac{V_0 AabC}{m + CA^2a^2b^2} = 1.0\ m/s$$