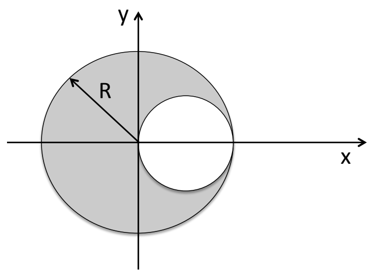
Prova Esonero Elettromagnetismo - 05.05.2017

(a.a. 2016/17, S. Giagu/F. Lacava/S. Petrarca)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 2.5 ore.

Esercizio 1

In una sfera di raggio $R = 5.0\ cm$ con una cavità di raggio $R/2$, come in figura, è presente una distribuzione uniforme di carica con densità $\rho = 1.5 \times 10^{-10}\ C/m^3$. L'asse del solido coincide con l'asse x e il centro della sfera è posizionato nell'origine degli assi.



a) Si trovi la carica totale presente sul solido.

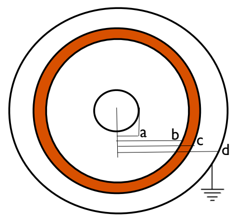
- Si determinino le espressioni del campo elettrico sull'asse x nei seguenti intervalli:

b) per $x \geq R$ e $x \leq -R$ calcolando i valori per $x = R$ e $x = -R$.
c) per $-R \leq x \leq 0$;
d) per $0 \leq x \leq R$ dimostrando che il campo è costante e se ne dia il valore.

e) Si trovi la forza agente su un dipolo elettrico di modulo $p = 2.5 \times 10^{-4}\ Cm$ posto nel punto di coordinate $(3R, 0, 0)$ con componenti $(p, 0, 0)$.

Esercizio 2

Un condensatore cilindrico di lunghezza $l = 10.0$ cm è composto da un'armatura metallica interna di raggio $a = 0.5$ mm, uno strato di dielettrico cilindrico con: raggio interno $b = 3.5$ mm, raggio esterno $c = 4.0$ mm e con una costante dielettrica relativa dipendente dalla distanza dall'asse $\epsilon_r = c/r$, e da un'armatura metallica esterna di raggio $d = 5.0$ mm collegata a massa.
Sapendo che la superficie laterale esterna del dielettrico è una superficie equipotenziale con $V = 100.0\,\mathrm{V}$ calcolare:



a) la carica Q presente sull'armatura interna;
b) la capacità del condensatore;
c) la carica di polarizzazione che compare sulle superfici cilindriche del dielettrico;
d) la densità di carica di polarizzazione nel dielettrico in funzione della distanza dall'asse, e
e) la carica totale di polarizzazione di volume del dielettrico.

Effettuare i calcoli nell'approssimazione di condensatore infinitamente lungo; il disegno della sezione del condensatore è riportato in figura. Si consiglia di usare, quando è il caso, gli operatori differenziali in coordinate cilindriche.

Soluzione 1

a)
Il solido si può trattare come la sovrapposizione di una sfera carica con densità ρ di raggio R e di una sfera di raggio $R/2$ e densità $-\rho$ a posto della cavità.
Le cariche positiva e negativa di queste sfere e la carica totale sono:

$$Q_+ = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \qquad Q_- = -\frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 \rho \qquad Q = Q_+ + Q_- = \frac{7}{6}\pi R^3 \rho = 6.87 \times 10^{-14}\ C$$

b)
Il campo è dato dalla sovrapposizione dei campi delle due sfere cariche.
- Intervallo per $x > R$:

$$E_{tot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_+}{x^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_-}{(x - R/2)^2}$$

$$E_{tot} = \frac{1}{3}\frac{R^3}{\epsilon_0}\rho\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3\epsilon_0}\left(\frac{R}{2}\right)^3 \rho \frac{1}{(x - R/2)^2}$$

che per $x = R$ diventa $E_{tot} = E_+ + E_- = (\rho R)/(6\epsilon_0) = 0.141\ V/m$.

- Intervallo per $x < -R$:

$$E_{tot} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_+}{x^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_-}{(x - R/2)^2}$$

$$E_{tot} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0}R^3\rho\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3\epsilon_0}\left(\frac{R}{2}\right)^3 \rho \frac{1}{(R/2 - x)^2}$$

che per $x = -R$ diventa $-(\rho R)/(3\epsilon_0)\frac{17}{18} = -0.266\ V/m$.

c)
- Intervallo per $-R < x < 0$.
Il campo dato dalla sfera positiva si trova facilmente dal teorema di Gauss:

$$4\pi|x|^2 E_+ = \frac{4\pi}{3}|x|^3\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad E_+ = \frac{\rho}{3\epsilon_0}x$$

Quello della sfera negativa:

$$E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_-}{(R/2 - x)^2}$$

E quindi:

$$E_{tot} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}x + \frac{1}{3\epsilon_0}\left(\frac{R}{2}\right)^3 \rho \frac{1}{(R/2 - x)^2}$$

che in $x = -R$ e in $x = 0$ assume i valori trovati in b) e poi in d).

d)
- Intervallo $0 \le x \le R/2$
Il campo elettrico in un punto di coordinate $(x, 0, 0)$ è la sovrapposizione dei campi della sfera positiva e di quella negativa al loro interno. Applicando due volte il teorema di Gauss si trova:

$$4\pi x^2 E_+ = \frac{4\pi}{3\epsilon_0}\rho x^3 \qquad E_+ = \frac{\rho}{3\epsilon_0}x$$

$$4\pi\left(\frac{R}{2} - x\right)^2 E_- = \frac{4\pi}{3\epsilon_0}\rho\left(\frac{R}{2} - x\right)^3 \qquad E_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{R}{2} - x\right)$$

e sommando:

$$E_{tot} = E_+ + E_- = \frac{\rho R}{6\epsilon_0}$$

che non dipende da x.
- Intervallo $R/2 < x < R$
Per il campo dalla sfera positiva vale quanto già trovato, per quello della negativa si ha:

$$4\pi\left(x-\frac{R}{2}\right)^2 E_- = -\frac{4\pi}{3\epsilon_0}\rho\left(x-\frac{R}{2}\right)^3 \qquad E_- = -\frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(x-\frac{R}{2}\right) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{R}{2}-x\right)$$

E sommando i campi delle due sfere, anche in questo intervallo si trova:

$$E_{tot} = E_+ + E_- = \frac{\rho R}{6\epsilon_0}$$

come richiesto di dimostrare. Il valore del campo per $0 \le x \le R$ è: $E =$

e)
La forza sul dipolo è:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(pE_x\right)$$

con, per simmetria, la sola componente x non nulla:

$$F_x = p\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{p\rho R^3}{3\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{(x-R/2)^2}\right] = \frac{p\rho R^3}{3\epsilon_0}\left[-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{4}\frac{1}{(x-R/2)^3}\right]$$

che in $x = 3R$ prende il valore:

$$F_x = -8.2\times 10^{-5}\ N$$

Soluzione 2

La capacità di un condensatore cilindrico ideale è data da $C = 2\pi l\epsilon/\ln(R_2/R_1)$; con i dati del problema $2\pi l\epsilon_0 = 5.563$ pF. $C_{cd} = 2\pi l\epsilon_0/\ln(d/c) = 24.93$ pF.

a) $Q = C_{cd}V = 24.93 \cdot 10^{-10}$ C

Per il teorema di Gauss : $2\pi lrD = Q$, quindi il campo elettrico per $b \le r \le c$ è : $E = D/\epsilon = \frac{Q}{2\pi rl\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{Q}{2\pi l\epsilon_0 c}$. La differenza di potenziale tra le superfici laterali di raggio b e c è: $\Delta V = \frac{Q(c-b)}{2\pi l\epsilon_0 c}$ per cui $C_{bc} = \frac{2\pi l\epsilon_0 c}{c-b} = 44.5$pF.
Inoltre $C_{ab} = 2\pi l\epsilon_0/\ln(b/a) = 2.85$ pF.

b)
La capacità del condensatore è: $C = \frac{1}{\frac{1}{C_{ab}}+\frac{1}{C_{bc}}+\frac{1}{C_{cd}}} = \frac{2\pi l\epsilon_0}{\ln b/a+(1-b/c)+\ln d/c} = 2.42$ pF.

c)
$\mathbf{P} = \frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}\mathbf{D}$ quindi $\sigma_b = -\frac{Q}{2\pi lc}(1-\frac{1}{\epsilon_r(b)}) = -\frac{Q}{2\pi lc}(1-\frac{b}{c})$ e $P_c = 0$.
Le cariche di polarizzazione sono: $Q_c = 0$ e $Q_b = -Q(1-\frac{b}{c}) = -3.12 \cdot 10^{-10}$ C.

d)
$\mathbf{P} = (1-r/c)\frac{Q}{2\pi lr}\hat{\mathbf{r}}$
densità di carica di polarizzazione (div in coordinate cilindriche) $\rho_{pol} = -div\mathbf{P} = -\frac{1}{r}\{-\frac{\partial}{\partial r}\frac{Qr}{2\pi lc}\} = \frac{Q}{2\pi lcr}$

e)
Carica di polarizzazione di volume $Q_{pol} = \int_b^c \rho_{pol} 2\pi lrdr = Q\frac{c-b}{c}$ come deve $Q_{pol} = -Q_b$.