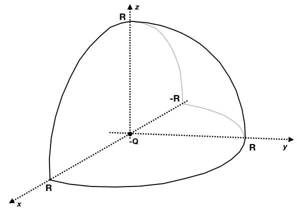
Prova Scritta Elettromagnetismo - 6.7.2017
(a.a. 2016/17, S. Giagu/F. Lacava/S. Petrarca)

---

recupero primo esonero: risolvere l'esercizio 1: tempo massimo 1.5 ore.
recupero secondo esonero: risolvere l'esercizio 2: tempo massimo 1.5 ore.
intero scritto: risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3.0 ore.

Esercizio 1

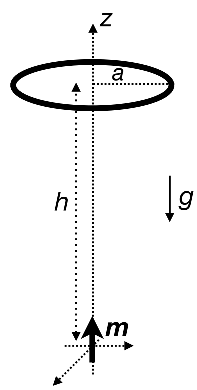
Sulla parte di superficie sferica delimitata in coordinate cartesiane da: $-R \leq x \leq R$, $0 \leq y \leq R$ e $0 \leq z \leq R$ con $R = 5$cm è distribuita i modo uniforme una carica $Q = 10^{-6}$C. La stessa carica cambiata di segno $(-Q)$ è posta nell'origine del sistema di riferimento punto $O \equiv (0, 0, 0)$



a) Calcolare, in funzione di z, il potenziale elettrostatico sull'asse z per $0 \leq z \leq R$ generato dalla carica distribuita,
a1) in particolare calcolarne il valore nell'origine O,
a2) calcolare la componente nella direzione $\hat{z}$ della forza elettrostatica esercitata dalla distribuzione di carica sulla carica puntiforme.
b) Determinare il momento di dipolo elettrico del sistema in intensità, direzione e verso.

Esercizio 2

Il potenziale vettore di un dipolo magnetico $\vec{m} = (0, 0, m)$ con $m = 0.35\,\mathrm{Am}^2$ posto nell'origine degli assi, scritto in coordinate cilindriche, è dato dall'espressione:



$$\vec{A}(\rho, \phi, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\phi}.$$

a) Si verifichi che le componenti del campo induzione magnetica a grande distanza rispetto alle dimensioni del dipolo magnetico sono:

$$B_\rho = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}; \quad B_\phi = 0; \quad B_z = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{2z^2 - \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

a1) Verificare che $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

Lo studente può procedere alla soluzione dei quesiti b) e c) usando le formule date in a) ed eventualmente lasciando alla fine le dimostrazioni richieste in a) e a1).

Una spira circolare di raggio $a = 5.0\,\mathrm{cm}$ e massa $m_g = 200.0\,\mathrm{mg}$ percorsa da una corrente i, con il suo asse coincidente con l'asse $\hat{z}$ e vincolata a muoverso solo lungo tale asse, si trova sospesa in equilibrio tra forza magnetica e forza gravitazionale ad un'altezza $h = 5.0\,\mathrm{cm}$ sopra il dipolo magnetico $\vec{m}$.

Assumendo l'altezza h grande rispetto alle dimensioni del dipolo magnetico calcolare:
b) la corrente che scorre nella spira nell'approssimazione di piccola spira, indicandone il verso;
c) la corrente che scorre nella spira in equilibrio alla stessa altezza senza l'approssimazione del punto **b)**.

Soluzione
Esercizio 1

a)
La densità di carica σ sulla porzione di sfera in considerazione si ottiene da : $Q = \sigma\frac{4\pi R^2}{4}$ ossia $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$; per cui la distribuzione di carica sulla porzione di sfera è: $dq = \sigma R^2 d\theta \sin\theta d\phi = \frac{Q}{\pi} d\theta \sin\theta d\phi$. La distanza $d(\theta, \phi)$ tra il generico punto sulla sfera e un punto di osservazione $P(0, 0, z)$ preso sull'asse z è data da $d(\theta, \phi|z) = \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta}$. Il potenziale sul segmento dell'asse z per $0 \le z \le R$ è dato da :

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \frac{dq}{d} = \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0} \cdot \int \frac{d\theta \sin\theta d\phi}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 zR}(\sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR})\ ;$$

l'integrale è stato calcolato nel dominio: $0 \le \theta \le \pi/2$ e $0 \le \phi \le \pi$.

a1) Il potenziale nell'origine degli assi si può calcolare direttamente:

$$V(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \frac{\sigma R^2 d\theta \sin\theta d\phi}{R} = \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0} \cdot \int \frac{d\theta \sin\theta d\phi}{R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = 180\, kV$$

oppure come limite $z \to 0$ dell'espressione trovata sopra applicando il teorema di de l'Hopital.

a2) La componente del campo nella direzione z si può trovare dal gradiente del potenziale:

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\left[-\frac{1}{z^2}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - R + z\right) + \frac{1}{z}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} + 1\right)\right]$$

che nel limite $z \to 0$ diventa:

$$E_z = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2}$$

e la componente z della forza risulta:

$$F_z = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R^2} = \ 1.8\ N$$

Allo stesso risultato si può arrivare calcolando direttamente il modulo del campo dalla distribuzione di carica:

$$E_z = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS \cos\theta}{R^2} = \frac{Q}{4\epsilon_0 \pi R^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\ d\sin\theta = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2}$$

b) Il momento di dipolo elettrico della distribuzione è dato da: $\mathbf{p} = \int \mathbf{r} dq$ con componenti:

$p_x = \int x dq = \int R\sin\theta\cos\phi \frac{Q}{\pi} d\theta \sin\theta d\phi = 0;$

$p_y = \int y dq = \int R\sin\theta\sin\phi \frac{Q}{\pi} d\theta \sin\theta d\phi = \frac{RQ}{2};$

$p_z = \int z dq = \int R\cos\theta \frac{Q}{\pi} d\theta \sin\theta d\phi = \frac{QR}{2}.$

Quindi il vettore momento di dipolo elettrico giace nel piano $y - z$ diretto come la bisettrice del piano, nel verso positivo dell'asse y e z, e h amodulo: $p = \frac{QR}{\sqrt{2}} = 3.5\, 10^{-8}$ Cm.

Esercizio 2
a)
Le componenti del campo si possono facilmente trovare usando le formule del rotore in coordinate cilindriche:

$$B_\rho = (\nabla \times \vec{A})_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{3m\rho z}{(\rho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$B_\varphi = (\nabla \times \vec{A})_\varphi = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = 0$$

$$B_z = (\nabla \times \vec{A})_\rho = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{2z^2-\rho^2}{(\rho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Così per la verifica della divergenza, sostituendo nell'espressione in coordinate cilindriche le componenti del campo $\vec{B}$:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{3\rho^2 z}{(\rho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2z^2-\rho^2}{(\rho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right)\right] = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\left[\frac{6z^3-9\rho^2 z}{(\rho^2+z^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{9\rho^2 z - 6z^3}{(\rho^2+z^2)^{\frac{7}{2}}}\right] = 0$$

b)
Nell'approssimazione di piccola spira il momento magnetico della spira è $m_s = \pi a^2$ e per equilibrare la forza peso deve essere rivolto verso il basso. Ciò determina il verso orario della corrente vista dall'alto.
La forza agente sulla spira nel campo magnetico $\vec{B}$ prodotto dal dipolo magnetico ha solo componente lungo l'asse z ed è:

$$F_z = \nabla_z(\vec{m}_s \cdot \vec{B}) = \nabla_z\left(-\frac{\mu_0 m m_s}{4\pi}\frac{2z^2-\rho^2}{(\rho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right)_{\rho=0} = \frac{3\mu_0}{2\pi}\frac{m m_s}{z^4}$$

Questa forza deve bilamciare la forza peso in $z = h$ quindi:

$$\frac{3\mu_0}{2\pi}\frac{m\pi a^2 i}{h^4} = m_g g$$

e quindi:

$$i_b = \frac{2}{3\mu_0}\frac{m_g g h^4}{m a^2} = 7.4\ kA$$

c)
Considerando le dimensioni non trascurabili della spira, si deve considerare la forza di Lorentz agente su ogni elemento della spira. La forza risultante dalla componente B_z del campo è per simmetria nulla nel caso della spira circolare mentre su ogni elemento dl della spira la forza generata dalla componente B_ρ è $dF_z = idlB_\rho$. La forza agente su tutta la spira risulta:

$$F_z = 2\pi a i\ \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{3maz}{(a^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad .$$

e nel limite $a << z$ si riduce a quella trovata in precedenza.
La corrente richiesta per equilibrare la forza peso diventa ora:

$$i_c = \frac{2}{3\mu_0}\frac{m_g g(a^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}{m a^2 h} = 2^{\frac{5}{2}} i_b = 41.9\ kA$$

una differenza non trascurabile causata dall'approssimazione eccessiva usata in precedenza!
Si può arrivare allo stesso risultato trovando la forza dall'energia magnetica della spira nel campo d'induzione magnetica generato dal dipolo magnetico:

$$U_m = \Phi(B)i$$

Il flusso concatenato con la spira si calcola facilmente con una semplice integrazione sul piano orizzontale contenente la spira ($\hat{n}$ verso l'alto):

$$\Phi(B) = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\ dS = \int B_z\ dS = \int_0^a \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{2z^2-\rho^2}{(\rho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}2\pi\rho d\rho = \frac{\mu_0 m}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

osservando che:

$$\int_0^a \frac{2z^2-\rho^2}{(\rho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\ \rho d\rho = \frac{1}{2}\int_0^a \left[\frac{3z^2}{(\rho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{\rho^2+z^2}{(\rho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right]\ d\rho^2 =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^a \frac{3z^2}{(\rho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\ d\rho^2 - \frac{1}{2}\int_0^a \frac{1}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\ d\rho^2 =$$

$$-\frac{z^2}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}|_0^a + \frac{1}{(\rho^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}|_0^a = \frac{\rho^2}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}|_0^a = \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e quindi:

$$F_z = \frac{dU_m}{dz} = -\frac{\mu_0 m i}{2}\frac{3za^2}{(a^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

come trovato in precedenza (si noti che in questa espressione i, che procede in senso orario, deve essere negativa per la scelta fatta qui per $\hat{n}$).