

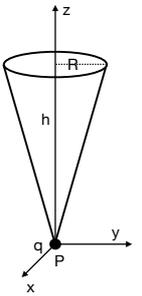
**Prova Scritta Elettromagnetismo - 07.05.2019**

(a.a. 2018/19, S. Giagu/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

**Esercizio 1**

Il sistema in figura è costituito da una carica puntiforme  $q = 1 \mu\text{C}$  posta nel punto P, e da una distribuzione statica di carica elettrica disposta sulla superficie di un cono rovesciato di altezza  $h = 50 \text{ cm}$  e raggio di base  $R = 10 \text{ cm}$ . La densità di carica sulla superficie del cono è descritta dall'espressione  $\sigma(z) = \frac{\sigma_0}{h}z$ , con  $z \in [0, h]$  la coordinata sull'asse  $z$  in figura a rispetto al punto P. Sapendo che la carica elettrica totale depositata sulla superficie del cono è pari a  $-q$ , determinare:



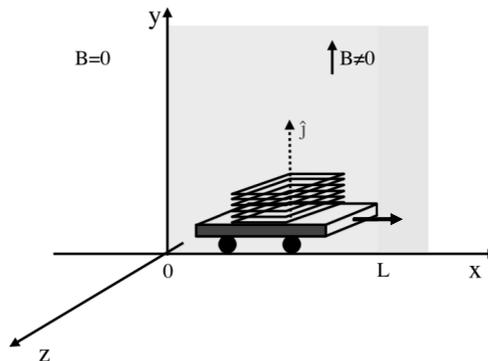
- a)  $\sigma_0$ ;
- b) il potenziale elettrostatico generato dalla distribuzione conica nel punto P;
- c) il momento di dipolo elettrico del sistema;
- d) la velocità minima che bisogna imprimere alla carica  $q$  di massa  $m = 1 \text{ g}$  posta in P affinché possa portarsi a distanza infinita lungo la direzione  $-z$  dal punto P.

**Esercizio 2**

Un carrello scorre senza attrito con velocità iniziale  $v_0 = 3.5 \text{ m/s}$  su un binario orizzontale rettilineo, da assumere come asse  $x$ . Sul carrello è montato un avvolgimento di  $N = 40$  spire complanari quadrate con i lati di lunghezza  $\ell = 2.0 \text{ cm}$ , paralleli agli assi  $x$  e  $z$ , di filo di rame di sezione circolare  $r = 0.5 \text{ mm}$  di diametro, ( $\rho_{Cu} = 1.7 \cdot 10^{-9} \Omega\text{m}$ ) con la normale orientata lungo l'asse  $y$ . La massa totale del carrello con le spire vale  $m = 30 \text{ g}$ . Nella regione di spazio  $x > 0$  si ha un campo magnetico di induzione  $B$  diretto lungo l'asse  $y$  e avente modulo  $B = 0.2 \text{ T}$ , mentre il campo è nullo per  $x \leq 0$ .

Si determini:

- a) la forza elettromotrice  $fem$  indotta sull'avvolgimento e la corrente mentre entra e transita nella regione in cui il campo di induzione magnetica è diverso da zero, esprimendo le grandezze in funzione della velocità;
- b) l'andamento della velocità in funzione del tempo, mentre il carrello è parzialmente inserito nella regione in cui il campo magnetico è diverso da zero, facendone un grafico schematico;
- c) lo spazio percorso in funzione del tempo, mentre il carrello è parzialmente inserito nella regione in cui il campo magnetico è diverso da zero;
- d) il valore minimo di  $\ell$  per cui il carrello si ferma in un tratto finito.



### Soluzione 1

a)

$$Q_{cono} = -q = \int \sigma dS = \int_0^h \frac{\sigma_0}{h} z 2\pi z \tan \alpha \frac{dz}{\cos \alpha} = \frac{2}{3} \pi \sigma_0 R \sqrt{R^2 + h^2};$$
$$\sigma_0 = -\frac{3q}{2\pi R \sqrt{R^2 + h^2}} = -9.4 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2.$$

b)

$$V(P) = V(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma ds}{r'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^h \frac{\sigma_0}{h} z 2\pi z \tan \alpha \frac{dz}{\cos \alpha} \frac{1}{\frac{z}{\cos \alpha}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_0}{h} z 2\pi \tan \alpha \int_0^h z dz = \frac{\sigma_0 R}{4\epsilon_0} = -27.5 \text{ kV}.$$

c)

$$\vec{p} = \hat{z} p_z = \hat{z} \int \sigma z dS = \hat{z} \int_0^h z \frac{\sigma_0}{h} z 2\pi z \tan \alpha \frac{dz}{\cos \alpha} = \hat{z} \frac{\sigma_0 2\pi \tan \alpha}{h \cos \alpha} \int_0^h z^3 dz = \hat{z} \frac{\pi \sigma_0}{2} R h \sqrt{R^2 + h^2} = -3.6 \cdot 10^{-7} \text{ Cm } \hat{z}.$$

d)

Applicando la conservazione dell'energia:

$$K_i + qV(0) = K_f + qV(\infty) = 0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = -qV(0) = \frac{-q\sigma_0 R h}{4\epsilon_0} = \frac{3q^2 h}{8\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + h^2}}.$$

da cui:

$$v = \sqrt{\frac{3q^2 h}{4\pi m \epsilon_0 \sqrt{R^2 + h^2}}} = 5.1 \text{ m/s}.$$

## Soluzione 2

a) La forza elettromotrice vale

$$f_{em} = \frac{d\Phi(B)}{dt} = Nv\ell B$$

La resistenza dell'avvolgimento vale:

$$R = \frac{4N\ell}{\pi r^2} \rho_{Cu}$$

quindi la corrente vale:

$$I = \frac{f_{em}}{R} = Nv\ell B \frac{\pi r^2}{4N\ell \rho_{Cu}} = \frac{vB\pi r^2}{4\rho_{Cu}}$$

b)  
Sul ramo dell'avvolgimento immerso nel campo magnetico si esercita una forza

$$F = -B\ell NI$$

tale forza si oppone al flusso tagliato e si annulla nel momento in cui l'avvolgimento è completamente immerso nel campo  $B$ . Nel tratto  $x$  compreso tra 0 e  $\ell$ , l'equazione del moto è:

$$m\dot{v} = -B\ell N \frac{B\pi r^2}{4\rho_{Cu}} v$$

quindi

$$\dot{v} = -B\ell N \frac{B\pi r^2}{4\rho_{Cu}m} v = -\frac{v}{\tau}$$

con

$$\tau = \frac{4\rho_{Cu}m}{N\ell B^2\pi r^2} = 8.1 \text{ ms}$$

La velocità in funzione del tempo vale quindi:

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

c)  
Lo spazio percorso si ottiene integrando nel tempo:

$$x(t) = \int_0^t v_0 e^{-t'/\tau} dt' = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau})$$

Il tratto  $0 < x < \ell$  è percorso nel tempo:

$$t = -\tau \ln \left( 1 - \frac{\ell}{v_0 \tau} \right) = 10 \text{ ms}$$

Per  $x > \ell$ ,  $m\dot{v} = 0$ , e  $v = \text{cost}$ .

d)  
affinché il carrello si fermi, è necessario che la spira sia più lunga dello spazio totale percorso in decelerazione. Il carrello quindi deve impiegare un tempo infinito a fermarsi. Si ha:

$$\ell > x(t = \infty) = v_0 \tau$$

Ricordando che  $\tau$  dipende da  $\ell$ , si ha:

$$\ell > v_0 \frac{4\rho_{Cu}m}{N\ell B^2\pi r^2}$$

e quindi

$$\ell > \sqrt{v_0 \frac{4\rho_{Cu}m}{N B^2 \pi r^2}} = 2.4 \text{ cm}$$