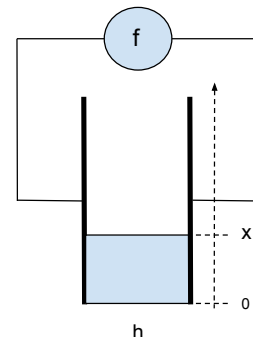


risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

Il condensatore piano mostrato in figura è costituito da due armature verticali quadrate di lato $L = 1.0\text{ m}$ distanti tra loro $h = 10.0\text{ cm}$, ed è connesso ad un generatore di forza elettromotrice $f = 150\text{ V}$. Tra le due armature si immette un liquido isolante di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 80$ sino ad un livello pari ad x . Si chiede di determinare trascurando gli effetti di bordo:

- l'espressione della capacità del condensatore in funzione di x ;
- L'intensità dei vettori \mathbf{P} , \mathbf{E} e \mathbf{D} nei due mezzi;
- Il valore delle cariche elettriche Q_1 e Q_2 presenti sulle porzioni dell'armatura del condensatore riempita di dielettrico e nel vuoto quando $x = \frac{L}{2}$;
- il valore di x per il quale l'energia elettrostatica immagazzinata nella parte riempita di liquido è uguale a quella immagazzinata nella parte rimanente.

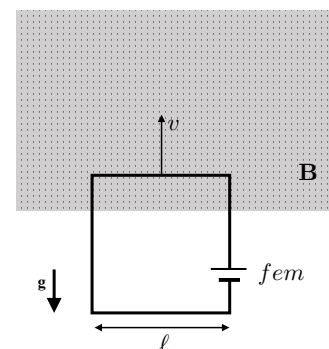


Esercizio 2

Un filo di rame di sezione $A = 1 \cdot 10^{-8}\text{ m}^2$ è piegato a formare un avvolgimento con $N=2000$ spire quadrate di lato $\ell = 4.5\text{ cm}$. Il rame ha resistività $\rho = 1.68 \cdot 10^{-8}\text{ }\Omega\text{m}$ e densità $d = 8920\text{ kg/m}^3$. Ai capi del filo è presente un generatore di forza elettromotrice $fem = 12\text{ V}$. L'avvolgimento è posto verticalmente come in figura, ed è parzialmente immerso in un campo di induzione magnetica $B = 0.5\text{ T}$ uscente dal piano del disegno. Si osserva che la spira si muove verso l'alto con velocità uniforme v (dopo un transiente iniziale).

Si calcoli:

- la corrente i che circola nella spira in moto;
- la forza elettromotrice indotta fem_i ;
- la velocità v con cui si muove l'avvolgimento;
- indicare come cambia la velocità se raddoppia il valore della sezione del filo, A .



Soluzione

Esercizio 1

a)

La capacità del condensatore C è data dal parallelo del condensatore formato dalla parte con il liquido e da quello formato dalla restante parte in vuoto:

$$C = C_1 + C_2 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{Lx}{h} + \epsilon_0 \frac{L(L-x)}{h} = \frac{\epsilon_0 L}{h} [L + x(\epsilon_r - 1)].$$

b)

Il condensatore è connesso al generatore di forza elettromotrice f , di conseguenza la differenza di potenziale ai capi delle due armature sarà anche essa f .

Trascurando effetti di bordo abbiamo che i campi elettrici \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 all'interno del dielettrico e nel vuoto sono uguali per cui:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 = E = \frac{f}{h} \\ D_1 &= \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{f}{h} \\ D_2 &= \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{f}{h} \\ P_1 &= \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} D_1 = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \frac{f}{h} \\ P_2 &= 0. \end{aligned}$$

c)

Avremo:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sigma_1 Lx = E_1 \epsilon_0 \epsilon_r Lx = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{f}{h} Lx = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{f L^2}{h} \frac{1}{2} = 5.3 \cdot 10^{-7} \text{ C}; \\ Q_2 &= \sigma_2 L(L-x) = E_2 \epsilon_0 L(L-x) = \epsilon_0 \frac{f}{h} L(L-x) = \epsilon_0 \frac{f L^2}{h} \frac{1}{2} = \frac{Q_1}{\epsilon_r} = 6.6 \cdot 10^{-9} \text{ C}. \end{aligned}$$

d)

L'energia elettrostatica è immagazzinata in ciascun condensatore è data da:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} E D_1 Lx = \frac{1}{2} \frac{f}{h} \epsilon_0 \epsilon_r \frac{f}{h} Lx; \\ U_2 &= \frac{1}{2} E D_2 L(L-x) = \frac{1}{2} \frac{f}{h} \epsilon_0 \frac{f}{h} L(L-x); \end{aligned}$$

per cui eguagliando le due energie e risolvendo rispetto alla quota di dielettrico x :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{f}{h} \epsilon_0 \epsilon_r \frac{f}{h} Lx &= \frac{1}{2} \frac{f}{h} \epsilon_0 \frac{f}{h} L(L-x) \implies \\ x_0 &= \frac{L}{\epsilon_r - 1} = 1.3 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Esercizio 2

a)

Il filo ha resistenza

$$R = \rho \frac{4\ell N}{A} = 605 \Omega$$

e massa

$$m = 4N\ell Ad = 32 \text{ g.}$$

Se il moto avviene a velocità costante, vuol dire che la forza peso e la forza di Lorentz sono uguali e opposte:

$$mg + N\ell i B = 0 \quad N\ell i B = -mg \quad g < 0$$

da cui

$$i = -\frac{mg}{N\ell B} = -\frac{4Adg}{B} = 7.00 \text{ mA.}$$

b)

Nel filo circola la corrente i , e quindi la forza elettromotrice totale vale

$$fem_{\text{tot}} = Ri = -\rho \frac{4\ell N}{A} \frac{4Adg}{B} = -\frac{16\rho dg\ell N}{B} = 4.23 \text{ V}$$

(notiamo che non dipende dal valore di A). Se l'avvolgimento viaggia verso l'alto, il flusso del campo di induzione magnetica aumenta, e per la legge di Lenz, la forza elettromotrice indotta si oppone alla fem del generatore. Vale quindi

$$fem + fem_i = fem_{\text{tot}} = Ri,$$

da cui

$$fem_i = -fem + Ri = -7.77 \text{ V.}$$

c)

La forza elettromotrice indotta è data dalla variazione di flusso del campo di induzione magnetica. In modulo:

$$fem_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -NB\ell v.$$

Ricaviamo quindi

$$v = -\frac{fem_i}{NB\ell} = 0.17 \text{ m/s} \quad (g < 0)$$

d)

Inserendo in v l'espressione della fem_i si ottiene:

$$v = -\frac{fem_i}{NB\ell} = \frac{fem - R \frac{mg}{NB\ell}}{NB\ell} = \frac{fem NB\ell - mRg}{(NB\ell)^2}$$

dove il prodotto mR non dipende da A :

$$mR = dA4N\ell \frac{\rho 4N\ell}{A} = \rho d(4N\ell)^2$$

e quindi nemmeno la velocità.

Altrimenti si può osservare: considerato che la fem_{tot} non dipende dal valore di A , anche la fem_i è indipendente dal valore di A , e quindi anche la velocità è indipendente dal valore di A .