Prova Scritta Elettromagnetismo - 7.2.2020

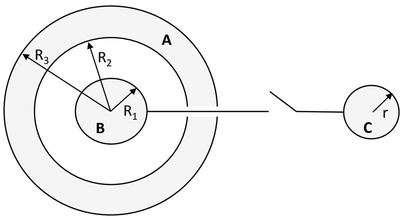
(a.a. 2018/19, S. Giagu/F. Lacava/F. Piacentini)

---

risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

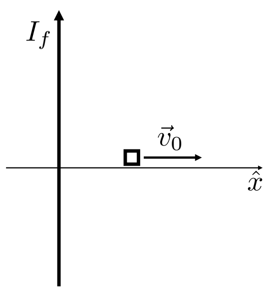
Esercizio 1

Un sistema di conduttori è formato come in figura da un conduttore sferico cavo A, di raggi interno ed esterno $R_2 = 4\,\mathrm{cm}$ e $R_3 = 5\,\mathrm{cm}$, con al suo interno un conduttore sferico B, di raggio $R_1 = 2.5\,\mathrm{cm}$, e poi da un conduttore sferico esterno C di raggio $r = 2\,\mathrm{cm}$, posti a grande distanza in modo che l'induzione elettrostatica tra essi sia trascurabile. Inizialmente sul conduttore B è depositata una carica $Q = 1\,\mathrm{nC}$ e sul conduttore C una carica $q = 0.2\,\mathrm{nC}$. Si determini:
a) il potenziale di ogni conduttore presente.
Successivamente i conduttori B e C sono connessi elettricamente. Si determini:
b) la carica presente su ogni conduttore;
c) la variazione di energia elettrostatica in seguito al collegamento dei due conduttori B e C;
d) il rapporto fra i campi elettrici sulle superfici dei conduttori B e C.



Esercizio 2

Un piccolo avvolgimento quadrato è composto da $N = 25$ spire di area $A = 12\,\mathrm{mm}^2$, di resistenza $R = 0.30\,\Omega$ e coefficiente di autoinduzione trascurabile. Esso si trova in prossimità di un filo rettilineo indefinito percorso da corrente costante $I_f = 7.0\,\mathrm{A}$. Il filo e l'avvolgimento giacciono su un piano comune, come in figura; si indichi con x la distanza tra filo e avvolgimento. Al tempo $t = 0$ l'avvolgimento si trova a distanza $x_0 = 3.0,\mathrm{cm}$ dal filo. Esso viene mantenuto a velocità costante $v = 300\,\mathrm{m/s}$ in allontanamento. Si determini:
a) il coefficiente di mutua induzione M tra il filo e l'avvolgimento, in funzione di x, calcolandone il valore per x_0;
b) la corrente I che circola nell'avvolgimento in funzione della distanza x dal filo, indicandone il verso, e calcolandone il valore I_0 al tempo $t = 0$;
c) la forza $\vec{F}$ (in funzione di x) sull'avvolgimento dovuta al campo di induzione magnetica, indicandone il verso, e calcolandone il valore al tempo $t = 0$;
d) la potenza dissipata nell'avvolgimento, in funzione x, e la potenza necessaria per mantenerlo in moto, calcolandone i valori per $t = 0$.

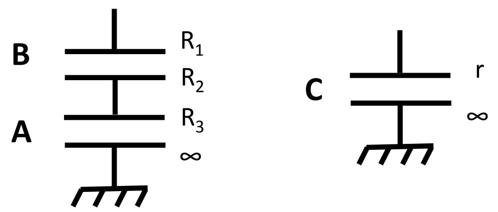


Soluzioni

Esercizio 1 - Soluzione 1

a)

Per la prima configurazione i due conduttori sferici si possono schematizzare con dei condensatori come in figura: con i condensatori A e B in serie e C isolato.



Le capacità sono:

$$C_{R_1R_2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1} \qquad C_{R_3\infty} = 4\pi\epsilon_0 R_3 = 5.56\ pF$$

$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{1}{C_{R_1R_2}} + \frac{1}{C_{R_3\infty}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_2R_1} + \frac{1}{R_3}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(R_2 - R_1)R_3 + R_2R_1}{R_1R_2R_3}$$

$$C_{AB} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1R_2R_3}{(R_2 - R_1)R_3 + R_2R_1} = 3.18\ pF \qquad C_C = 4\pi\epsilon_0\, r = 2.23\ pF$$

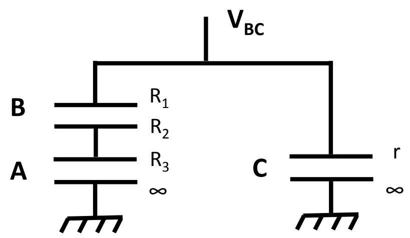
e i potenziali:

$$V_B = \frac{Q}{C_{AB}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(R_2 - R_1)R_3 + R_2R_1}{R_1R_2R_3} = 314.6\ V$$

$$V_A = \frac{Q}{C_{R_3\infty}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, R_3} = 179.8\ V \qquad V_C = \frac{q}{C_C} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\, r} = 89.9\ V$$

b)

Dopo che i conduttori C e B sono stati connessi la configurazione diventa quella nella seconda figura: si ha un solo condensatore che risulta dal parallelo di C_C e C_{AB} sul quale è depositata una carica $Q + q$. La capacità complessiva



C_{tot} è data da:

$$C_{tot} = C_{AB} + C_C = 5.40\ nF$$

Il potenziale su B e C è:

$$V_{BC} = \frac{Q + q}{C_{tot}} = \frac{Q + q}{C_{AB} + C_C} = 222.1\ V$$

Le cariche sui condensatori AB e C sono:

$$Q_{AB} = C_{AB}\, V_{BC} = \frac{C_{AB}}{C_{AB} + C_C}\,(Q + q) = 0.706\ nC$$

$$Q_C = C_C\, V_{BC} = \frac{C_C}{C_{AB} + C_C}\,(Q + q) = 0.494\ nC$$

c)

La variazione di energia elettrostatica è:

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{(Q + q)^2}{C_{tot}} - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_{AB}} - \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_C} = -33.0\ \mu J$$

d)
I campi elettrici sono:

$$E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_{AB}}{R_1^2} \qquad\qquad E_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_C}{r^2}$$

e il loro rapporto è:

$$\frac{E_B}{E_C} = \frac{Q_{AB}}{Q_C}\frac{r^2}{R_1^2} = \frac{C_{AB}}{C_C}\frac{r^2}{R_1^2} = \frac{R_2R_3}{(R_2-R_1)R_3+R_2R_1}\frac{r}{R_1} = 0.914$$

Esercizio 1 - Soluzione 2
a)
Il potenziale della sfera carica C, come noto, si può scrivere:

$$V_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} = 89.9\ V$$

Tra i conduttori A e B c'è induzione completa. La differenza di potenziale tra i conduttori B e A è:

$$V_B - V_A = \int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}\,dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

Il potenziale del guscio sferico A rispetto a infinito è:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_3} = 179.8\ V$$

Ne segue:

$$V_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) = 314.6\ V$$

b)
Quando i conduttori B e C sono collegati la carica $Q+q$ si ripartisce tra i due in modo che abbiano lo stesso potenziale. Diciamo Q_{AB} e Q_C le loro cariche. Usando le formule già trovate con le nuove cariche, possiamo scrivere le due equazioni:

$$Q_{AB}+Q_C = Q+q \qquad\qquad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_C}{r} = \frac{Q_{AB}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$$

Risolvendo il sistema di equazioni si trova:

$$Q_{AB} = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2R_3+r\left[(R_2-R_1)R_3+R_1R_3\right]}(Q+q) = 0.706\ nC$$

$$Q_C = \frac{r\left[(R_2-R_1)R_3+R_1R_3\right]}{R_1R_2R_3+r\left[(R_2-R_1)R_3+R_1R_3\right]}(Q+q) = 0.494\ nC$$

c)
L'energia elettrostatica di una sfera con carica Q e di raggio R è:

$$U = \int_R^\infty \frac{1}{2}\epsilon_0E^2\,4\pi R^2\,dR = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}$$

Per le energie prima del collegamento possiamo scrivere:

$$U_{r\infty} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r} \qquad\qquad U_{R_3\infty} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R_3}$$

$$U_{R_1R_2} = \int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2}\epsilon_0E^2\,4\pi R^2\,dR = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}$$

Dopo il collegamento dei conduttori B e C:

$$U'_{r\infty} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_C^2}{r} \qquad\qquad U'_{R_3\infty} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_{AB}^2}{R_3}$$

$$U'_{R_1R_2} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\, 4\pi R^2\, dR = \frac{1}{2}\frac{Q_{AB}^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1R_2}$$

Ne segue:

$$\Delta U = (U'_{R_1R_2} + U'_{R_3\infty} + U'_{r\infty}) - (U_{R_1R_2} + U_{R_3\infty} + U_{r\infty})$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[Q_{AB}^2\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1R_2} + \frac{1}{R_3}\right) + \frac{Q_C^2}{r^2} - Q^2\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - \frac{q^2}{r^2}\right] = -33.0\ \mu C$$

d)
Il rapporto tra i campi elettrici sui conduttori B e C è:

$$E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_{AB}}{R_1^2} \qquad\qquad E_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_C}{r^2}$$

e il loro rapporto è:

$$\frac{E_B}{E_C} = \frac{Q_{AB}}{Q_C}\frac{r^2}{R_1^2} = \frac{R_2R_3}{(R_2 - R_1)R_3 + R_2R_1}\frac{r}{R_1} = 0.914$$

Esercizio 2
a)
A distanza x il filo produce un campo di induzione magnetica entrante nel foglio, di intensità:

$$B = \frac{\mu_0 I_f}{2\pi x}.$$

Il coefficiente di mutua induzione vale

$$M = \frac{\Phi(B(I_f))}{I_f} = \frac{\mu_0 NA}{2\pi x}.$$

Per $x = x_0$, si ha

$$M_0 = \frac{\Phi(B(I_f))}{I_f} = \frac{\mu_0 NA}{2\pi x_0} = 2.0 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{H}.$$

b)
Nell'avvolgimento si genera una forza elettromotrice indotta

$$fem = -\frac{\Phi(B)}{dt} = -\frac{d}{dt}(MI_f) = -I_f\frac{dM}{dt} = -I_f\frac{dM}{dx}\frac{dx}{dt} = I_f\frac{\mu_0 NA}{2\pi x^2}v$$

La corrente indotta è quindi:

$$I = \frac{fem}{R} = \frac{I_f}{R}\frac{\mu_0 NA}{2\pi x^2}v$$

Per la legge di Lenz, questa corrente deve opporsi alla variazione del flusso di $\vec{B}$. Dato che $\vec{B}$ diminuisce quando l'avvolgimento si allontana, questo deve generare un campo concorde a quello ambiente. La corrente scorre pertanto in verso orario.
Al tempo $t = 0$, questa vale

$$I_0 = \frac{I_f}{R}\frac{\mu_0 NA}{2\pi x_0^2}v = 47\ \mu\mathrm{A}$$

c)
Possiamo calcolare la forza tra i fili dell'avvolgimento e il filo rettilineo usando la forza di Lorentz tra fili. Assumiamo che i fili abbiano lunghezza ℓ. Considerando che la forza agente sui due fili paralleli all'asse $\hat{x}$ è uguale e contraria, si ha

$$F_x = NI\ell B(x+\ell) - NIB(x) = NI\ell\left(B(x) + \frac{dB}{dx}\ell - B(x)\right) = NI\ell^2\frac{dB}{dx} = NIA\frac{dB}{dx}$$
$$= NIA\frac{d}{dx}\left(\frac{\mu_0 I_f}{2\pi x}\right) = -NIA\frac{\mu_0 I_f}{2\pi x^2} = -\left(\frac{\mu_0 NAI_f}{2\pi x^2}\right)^2\frac{v}{R}$$

al tempo $t = 0$, questa vale

$$F_0 = -\left(\frac{\mu_0 NAI_f}{2\pi x_0^2}\right)^2\frac{v}{R} = -2.17 \cdot 10^{-12}\mathrm{N}$$

d)
La potenza dissipata nell'avvolgimento per effetto Joule vale

$$P = RI^2 = R\left(\frac{\mu_0 NA}{2\pi x^2}\frac{I_f}{R}v\right)^2$$

La potenza necessaria per mantenere in moto l'avvolgimento vale

$$P = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v} = -F_x v = \left(\frac{\mu_0 NAI_f}{2\pi x^2}\right)^2 \frac{v^2}{R}$$

I due risultati sono coincidenti.

Per $t = 0$, vale

$$P = \left(\frac{\mu_0 NAI_f}{2\pi x_0^2}\right)^2 \frac{v^2}{R} = 6.5 \cdot 10^{-10}\,\text{W}$$