Prova Esonero Elettromagnetismo - 15.06.2020

(a.a. 2019/20, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

Un solenoide di lunghezza l=50 cm e raggio r_e=2.0 cm, dotato di N=200 spire contiene al suo interno un guscio cilindrico coassiale al solenoide, di raggio interno r_i=1.0 cm e raggio esterno pari a r_e, avente permeabilità magnetica relativa dipendente dalla distanza r dall'asse del cilindro $\chi_m(r) = \alpha r$ con $\alpha = 2\,\text{cm}^{-1}$. Inizialmente il solenoide è inserito in un circuito elettrico in cui vi è un generatore di forza elettromotrice costante V_0=12 V e una resistenza in serie R=100 Ω dove scorre una corrente costante.

Si determini:

a) l'andamento dei campi $\vec{H}$, $\vec{B}$ ed $\vec{M}$ in funzione del raggio;

b) il valore del coefficiente di autoinduzione L del solenoide;

c) le densità di correnti amperiane presenti nel materiale;

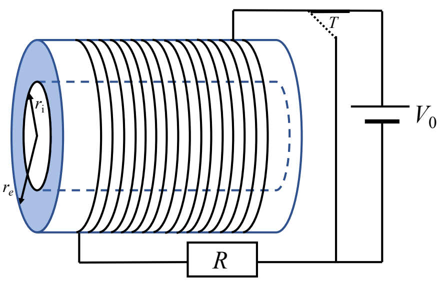
d) le correnti amperiane.

Ad un certo istante di tempo il solenoide viene connesso direttamente alla resistenza escludendo il generatore, azionando l'interruttore T mostrato in figura. In queste condizioni si determini:

e) il campo elettrico $\vec{E}(r,t)$ presente all'interno del solenoide in funzione della distanza r dall'asse e del tempo t.

Si ricorda la formula del rotore in coordinate cilindriche:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{z}$$



Esercizio 2

Un filo conduttore di lunghezza praticamente infinita e di sezione circolare di raggio $r_C = 3\,\text{cm}$ è percorso da una corrente costante di densità uniforme J. Il modulo del vettore induzione magnetica B ad una distanza $r_0 = r_C/2$ dall'asse del filo è pari a $B_0 = 2.4 \times 10^{-4}\,\text{T}$.

Si chiede di determinare:

a) il valore della corrente I che percorre il filo;

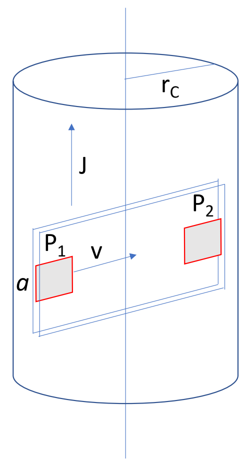
b) l'andamento del vettore $\vec{B}$ con la distanza r dall'asse, dentro e fuori dal filo, calcolando il suo valore numerico sul bordo del filo. Si specifichino direzione e verso di $\vec{B}$.

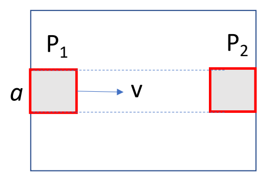
Una spira metallica quadrata di lato $a = 4\,\text{mm}$ e resistenza $R = 10^{-3}, \Omega$ viene condotta con velocità costante $v = 20\,\text{cm/s}$ ortogonalmente al filo attraverso una sottile intercapedine passante per l'asse del conduttore stesso dalla posizione P_1 alla posizione P_2 come mostrato in figura. Nelle posizioni P_1 e P_2 la spira tocca le pareti del conduttore. Si assuma che la presenza dell'intercapedine non alteri apprezzabilmente la configurazione del campo $\vec{B}$.

Si chiede di determinare:

c) la corrente che scorre nella spira durante il moto;

d) l'energia totale dissipata nella spira nel corso del moto.





Soluzione 1

a)

Il campo H all'interno del solenoide è $H = ni$ (dove $n = N/l$):

$$H = \frac{N}{l} i = \frac{N}{l} \frac{V_0}{R} = 48\,\text{Asp/m}$$

e i campi $\vec{B}(r)$ e $\vec{M}(r)$ sono:

$$\text{per:} \qquad r < r_i \qquad \vec{B} = \mu_0 \frac{N}{l} i\, \hat{z} \qquad\qquad \text{e} \qquad \vec{M} = 0$$

$$\text{per:} \qquad r_i < r < r_e \qquad \vec{B} = \mu_0 (1 + \alpha\, r) \frac{N}{l} i\, \hat{z} \qquad\qquad \text{e} \qquad \vec{M} = \chi_m H = \alpha\, r \frac{N}{l} i\, \hat{z}$$

Fuori dal volume del solenoide, sia $\vec{H}$ che $\vec{B}$ diventano trascurabili e $\vec{M}$ risulta ovviamente nullo.

b)

Il flusso di B nel solenoide è:

$$\Phi = \int_0^{r_i} \mu_0 ni\, 2\pi r dr + \int_{r_i}^{r_e} \mu_0 (1 + \alpha\, r)\, ni\, 2\pi r dr$$

$$\Phi(B) = \mu_0\, ni\, 2\pi\, \frac{1}{2} r^2 |_0^{r_i} + \mu_0\, ni\, 2\pi\, \frac{1}{2} r^2 |_{r_i}^{r_e} + \mu_0\, ni\, 2\pi \alpha \int_{r_i}^{r_e} r^2\, dr$$

$$\Phi(B) = \mu_0\, ni\, \pi\; r_e^2 + \mu_0\, ni\, \frac{2\pi}{3}\, \alpha\, (r_e^3 - r_i^3) = \mu_0\, \pi\, n\, \left[r_e^2 + \frac{2}{3}\, \alpha\, (r_e^3 - r_i^3) \right] i$$

Il flusso concatenato con la corrente è:

$$\Phi_N(B) = N \Phi(B) = n\, l\, \Phi(B) = \mu_0\, \pi\, n^2\, l\, \left[r_e^2 + \frac{2}{3}\, \alpha\, \left(r_e^3 - r_i^3 \right) \right] i$$

e quindi il coefficiente di autoinduzione:

$$L = \frac{\Phi_N(B)}{i} = \mu_0\, \pi\, n^2\, l\, \left[r_e^2 + \frac{2}{3}\, \alpha\, \left(r_e^3 - r_i^3 \right) \right] = 4.2 \times 10^{-4}\,\text{H}$$

Allo stesso risultato si può arrivare integrando l'energia magnetica nel solenoide:

$$U_m = \frac{1}{2} L\, i^2 = \int_0^{r_e} u_m(r)\, l\, 2\pi\, r\, dr$$

$$U_m = \frac{1}{2} \mu_0\, H^2\, \pi r_i^2\, l + \frac{1}{2} \mu_0\, H^2\, l \int_{r_i}^{r_e} (1 + \alpha\, r)\, 2\pi\, r dr =$$

$$U_m = \frac{1}{2} L\, i^2 = \frac{1}{2} \mu_0\, \pi\, n^2\, l\, \left[r_e^2 + \frac{2}{3}\, \alpha\, \left(r_e^3 - r_i^3 \right) \right] i^2$$

$$L = \mu_0\, \pi\, n^2\, l\, \left[r_e^2 + \frac{2}{3}\, \alpha\, \left(r_e^3 - r_i^3 \right) \right]$$

c)

Dalle relazioni: $\quad \vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n}_{est} \quad$ e $\quad \vec{J}_{mv} = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad$ con $\quad \vec{M} = \alpha\, r\, ni\, \hat{z}$:

$$\vec{J}_{ms}(r_i) = -\alpha\, r_i\, ni\, \hat{\varphi} \qquad \vec{J}_{ms}(r_e) = \alpha\, r_e\, ni\, \hat{\varphi} \qquad \vec{J}_{mv} = -\frac{\partial M_z}{\partial r}\, \hat{\varphi} = -\alpha\, ni\, \hat{\varphi}$$

d)

$$I_{ms}(r_i) = J_{ms}(r_i)\, l = -\alpha\, r_i\, ni\, l = -48\,\text{A} \qquad\qquad I_{ms}(r_e) = J_{ms}(r_e)\, l = \alpha\, r_e\, nil = 96\,\text{A}$$

$$I_{mv} = \int_{r_i}^{r_e} J_{mv}\, l\, dr = -\alpha\, ni\, l\, (r_e - r_i) = -[I_{ms}(r_e) + I_{ms}(r_i)] = -48\,\text{A}$$

e)

Quando il generatore viene escluso, si ha un circuito RL che si scarica con costante di tempo $\tau = L/R$ quindi la corrente varia con la legge:

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

applicando la legge di Faraday-Neumann, per $r < r_i$:

$$\Phi(r) = \pi r^2 \, \mu_0 n i \qquad 2\pi r \, E = -\pi r^2 \, \mu_0 n \, \frac{di}{dt}$$

$$E(r,t) = \frac{1}{2}\mu_0 \, n \, r \, \frac{1}{\tau} \frac{V_0}{R} \, e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{2}\mu_0 \, n \, r \, \frac{V_0}{L} \, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

per $r_i < r < r_e$, sostituendo r_e con r nella espressione già trovata per Φ, si ottiene :

$$\Phi(r) = \mu_0 \, \pi \, n \left[r^2 + \frac{2}{3} \, \alpha \, \left(r^3 - r_i^3 \right) \right] \, i$$

$$2\pi r \, E = -\mu_0 \, \pi \, n \left[r^2 + \frac{2}{3} \, \alpha \, \left(r^3 - r_i^3 \right) \right] \frac{di}{dt}$$

$$E(r,t) = \frac{1}{2}\mu_0 \, n \, \frac{1}{r} \left[r^2 + \frac{2}{3} \, \alpha \, \left(r^3 - r_i^3 \right) \right] \frac{1}{\tau} \frac{V_0}{R} \, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$E(r,t) = \frac{1}{2}\mu_0 \, n \, \frac{1}{r} \left[r^2 + \frac{2}{3} \, \alpha \, \left(r^3 - r_i^3 \right) \right] \frac{V_0}{L} \, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Soluzione 2

a) Applichiamo il teorema della circuitazione di Ampere per ricavare il modulo del campo di induzione magnetica ad una distanza pari a r_0 dall'asse del cilindro conduttore:

$$2\pi r_0 B_0 = \mu_0 J \pi r_0^2 = \mu_0 I \frac{r_0^2}{r_C^2}$$

da cui

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I r_0}{r_C^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_C}$$

per cui ricaviamo infine il valore della corrente I:

$$I = \frac{4\pi r_C B_0}{\mu_0} = 72 \, \mathrm{A}$$

b) Ricaviamo il valore di B in funzione di r dal teorema della circuitazione di Ampere applicato nelle due regioni $r < r_C$ e $r > r_C$.

$$\begin{aligned} r < r_C : B &= \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_C^2} \\ r > r_C : B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi \, r} \end{aligned}$$

Sulla superficie del cilindro si ha

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_C} = 4.8 \times 10^{-4} \, \mathrm{T}$$

c) Definiamo come asse x quello parallelo alla direzione della velocità della spira da P_1 a P_2 con origine sull'asse del cilindro.Orientiamo inoltre la normale alla spira come uscente dal piano della figura. Detta $x(t)$ la posizione del centro della spira al tempo t, il flusso del campo magnetico attraverso la spira al generico tempo t sarà dato da:

$$\phi(B) = -a \int_{x(t)-a/2}^{x(t)+a/2} K x dx = -\frac{aK}{2} [(x(t) + a/2)^2 - (x(t) - a/2)^2] = -a^2 K x(t)$$

dove il segno $-$ rende ragione del fatto che per valori di x negativi il flusso risulta positivo in quanto il campo $\vec{B}$ è concorde al verso assegnato alla normale alla spire, e dove inoltre per semplicità abbiamo definito la costante K

$$K = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_C^2}$$

Si noti che allo stesso risultato si perviene calcolando il flusso come il prodotto del valore del campo al centro della spira

per la superfice della spira stessa. Questo risultato è corretto senza approssimazioni in virtù della linearità dell'andamento del campo B con x.
Otteniamo la corrente indotta sulla spira dal rapporto tra la forza elettromotrice indotta f_i e la resistenza della spira.

$$i = \frac{f_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\phi(B)}{dt} = \frac{a^2 K}{R} v = 5.1 \times 10^{-5}\,\mathrm{A}$$

sempre circolante in senso anti-orario e costante durante il moto.
d) L'energia dissipata si puó calcolare osservando che nel corso del moto la corrente è costante e pertanto la potenza dissipata in effetto Joule è pari a:

$$W_{diss} = Ri^2 = R\frac{a^4K^2}{R^2}v^2 = \frac{a^4K^2v^2}{R}$$

Il moto avviene a velocità costante per un tratto di lunghezza

$$\delta L = 2r_C - a$$

in un tempo

$$\delta t = \frac{\delta L}{v} = \frac{2r_C - a}{v}$$

E pertanto l'energia totale dissipata risulta essere:

$$E_{diss} = W_{diss}\delta_t = \frac{a^4K^2v}{R}(2r_C - a) = 7.3 \times 10^{-13}\,\mathrm{J}$$

Allo stesso risultato si puó pervenire calcolando l'energia meccanica necessaria per mantenere la spira in moto a velocità costante. La forza risulta necessariamente uguale e contraria a quella che si oppone al moto dovuta all'effetto del campo magnetico.

$$F_M = ia[B(x + a/2) - B(x - a/2)] = ia^2K = \frac{a^4K^2v}{R}$$

Per ottenere l'energia spesa, moltiplichiamo la forza magnetica per la lunghezza del tratto percorso e otteniamo

$$E_{mecc} = \frac{a^4K^2v}{R}(2r_C - a)$$

avente la stessa espressione di E_{diss} trovata precedentemente.