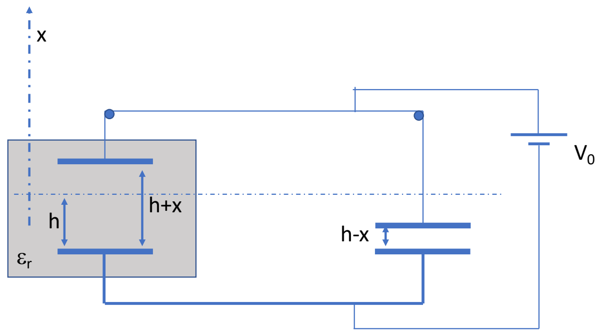
Prova Scritta Elettromagnetismo - 02.09.2021
(a.a. 2020/21, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1
Due condensatori piani di uguale superficie $S = 10$ cm^2 sono disposti come in figura. Il condensatore di sinistra è immerso in un liquido di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 2.4$, quello di destra è invece nel vuoto. Le armature inferiori sono collegate tra di loro e sono tenute fisse, quelle superiori sono invece collegate tramite un filo conduttore che pu scorrere su due carrucole. Le armature superiori sono inizialmente poste a distanza $h = 1.2$ mm dalle rispettive armature inferiori ($x = 0$ in figura). Il sistema è collegato ad un generatore di ddp $V_0 = 1.4$ kV.
a) Determinare la capacità complessiva del sistema ed i valori q_1 e q_2 delle cariche che si dispongono sui due condensatori. Successivamente viene scollegato il generatore.
b) Calcolare la massa m che è necessario porre sopra una delle armature superiori per mantenere il sistema nella posizione iniziale (x=0), specificando sopra quale delle due armature debba essere posto.
Infine, in assenza della massa, il filo viene lasciato libero di scorrere sulle carrucole e siano $h + x$ e $h - x$ le distanze tra le armature al variare di x.
c) Determinare lespressione della d.d.p. tra le armature al variare di x.
d) Determinare per quale valore di x il sistema risulta in equilibrio meccanico.



Esercizio 2
Un circuito è composto da due cilindri conduttori di resistenza trascurabile, concentrici e cavi, di spessore trascurabile; il cilindro interno ha raggio $R_1 = 1.0\,$mm e quello esterno ha raggio $R_2 = 9.0\,$mm. Lo spazio tra i due cilindri è riempito di materiale isolante di suscettività magnetica $\chi_m = -1.6 \times 10^{-4}$ e costante dielettrica $\epsilon_r = 1.0$. I cilindri hanno lunghezza $\ell = 2.5\,$m. Il circuito è connesso ad un generatore di differenza di potenziale $V = 120\,$V, ed è chiuso da una resistenza $R = 16\,\Omega$.
Trascurando gli effetti di bordo, si calcoli:
a) il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$, il campo magnetico $\mathbf{H}$ e il vettore magnetizzazione $\mathbf{M}$ in funzione della distanza dall'asse, specificandone direzione e verso e calcolando i valori numerici per una distanza dall'asse $d = 5.0\,$mm;
b) l'energia U_m immagazzinata nel campo magnetico, incluso il suo valore numerico;
c) l'induttanza L del sistema, incluso il suo valore numerico;
d) il campo elettrico $\mathbf{E}$ in funzione della distanza dall'asse e l'energia U_e del campo elettrostatico, incluso il suo valore numerico;
e) il vettore di Poynting $\mathbf{I}$ in funzione della distanza dall'asse.

Soluzione 1

(a) La capacità complessiva del sistema è data dalla somma delle singole capacità dei due condensatori:

$$C_{tot} = C_1 + C_2 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{h} + \epsilon_0 \frac{S}{h} = \epsilon_0 \frac{S}{h}\Big(1 + \epsilon_r\Big) = 25\,\mathrm{pF}$$

La carica si distribuisce sulle due armature:

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 V_0 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{h} V_0 = 2.48\ \times 10^{-8}\,\mathrm{C} \\ q_2 &= C_2 V_0 = \epsilon_0 \frac{S}{h} V_0 = 1.03\ \times 10^{-8}\,\mathrm{C} \end{aligned} \tag{1}$$

(b) Ciascuna delle due armature superiori sperimenta una forza attrattiva. Calcoliamo i moduli delle due forze nell'ipotesi di carica costante:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{q_1^2}{2\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{2}\Big(\frac{V_0}{h}\Big)^2 \\ F_2 &= \frac{q_2^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{\epsilon_0 S}{2}\Big(\frac{V_0}{h}\Big)^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Le due forze sono rivolte verso il basso in figura e chiaramente si ha che $F_1 > F_2$. Pertanto per equilibrare le forze occorre porre sopra l'armatura del condensatore 2 una massa m per cui:

$$mg = F_1 - F_2$$

da cui ricaviamo:

$$m = \frac{\epsilon_0 S}{2g}\Big(\frac{V_0}{h}\Big)^2 \Big(\epsilon_r - 1\Big) = 0.86\,\mathrm{g}$$

(c) Indichiamo con q_{tot} la carica totale presente nel sistema che, dato l'isolamento, resta costante al variare di x e pari alla somma $q_1 + q_2$ calcolata con l'eq.1. Al variare di x varia invece la differenza di potenziale $V(x)$ tra i conduttori:

$$V(x) = \frac{q_{tot}}{C_{tot}(x)}$$

Calcoliamo la capacità complessiva del sistema al variare di x:

$$C_{tot}(x) = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{h + x} + \frac{\epsilon_0 S}{h - x}$$

da cui:

$$V(x) = \frac{q_{tot}(h^2 - x^2)}{\epsilon_0 S\Big(\epsilon_r(h - x) + (h + x)\Big)}$$

(d) Per ricavare la posizione di equilibrio possiamo procedere in due modi differenti: o ricalcolando le due forze F_1 ed F_2 in funzione di x e uguagliando a 0 la loro somma, oppure ricavando l'energia elettrostatica $U(x)$ e derivandola rispetto ad x. Utilizziamo con il primo metodo. Per determinare le forze dobbiamo prima calcolare le cariche sulle due armature in funzione di x, $q_1(x)$ e $q_2(x)$. Per ricavarle possiamo risolvere il sistema:

$$\begin{gathered} q_1(x) + q_2(x) = q_{tot} \\ \frac{q_1(x)}{C_1(x)} = \frac{q_2(x)}{C_2(x)} \end{gathered}$$

da cui ricaviamo:

$$\begin{aligned} q_1(x) &= \frac{q_{tot}}{1 + \frac{1}{\epsilon_r}\frac{h+x}{h-x}} \\ q_2(x) &= \frac{q_{tot}}{1 + \epsilon_r \frac{h-x}{h+x}} \end{aligned}$$

Utilizzando le espressioni per le forze date in eq.2 otteniamo:

$$
\begin{aligned}
F_1(x) &= \frac{q_{tot}^2}{2\epsilon_0\epsilon_r S}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\epsilon_r}\frac{h+x}{h-x}\right)^2} \\
F_2(x) &= \frac{q_{tot}^2}{2\epsilon_0 S}\frac{1}{\left(1+\epsilon_r\frac{h-x}{h+x}\right)^2}
\end{aligned}
$$

Uguagliamo ora a zero la differenza tra le due forze. Dopo alcuni passaggi otteniamo:

$$
F_1(x) - F_2(x) = \frac{q_{tot}^2}{2\epsilon_0 S}\Big(\frac{\epsilon_r(h-x)^2}{\epsilon_r(h-x)+h+x} - \frac{(h+x)^2}{\epsilon_r(h-x)+h+x}\Big) = 0
$$

da cui, dopo aver riconosciuto che i due denominatori sono uguali ricaviamo l'equazione risolutiva:

$$
(\epsilon_r - 1)x^2 - 2h(\epsilon_r+1)x + h^2(\epsilon_r - 1) = 0 \tag{3}
$$

Da cui le soluzioni:

$$
x_{1/2} = h\Big(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-1}\Big)
$$

dove

$$
\alpha = \frac{\epsilon_r+1}{\epsilon_r-1}
$$

L'unica soluzione accettabile è quella con il segno $-$ dato che l'altra corrisponde ad un caso in cui $x > h$ incompatibile con i limiti del sistema. Pertanto la posizione di equilibrio è data da:

$$
x_{eq} = h\Big(\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}\Big) = 0.26\,\mathrm{mm}
$$

Piú agevolmente si otteniene lo stesso risultato esprimendo le due forze come il prodotto della densità di energia del campo elettrostatica per la superficie. In questo modo la differenza tra F_1 e F_2 risulta pari a:

$$
F_1 - F_2 = S(u_1 - u_2) = \frac{S}{2}\Big(\Big(\frac{V(x)}{h+x}\Big)^2\epsilon_0\epsilon_r - \Big(\frac{V(x)}{h-x}\Big)^2\epsilon_0\Big) = \frac{SV(x)^2\epsilon_0}{2}\Big(\frac{\epsilon_r}{(h+x)^2} - \frac{1}{(h-x)^2}\Big)
$$

Uguagliando quest'espressione a 0 otteniamo:

$$
\frac{\epsilon_r}{(h+x)^2} = \frac{1}{(h-x)^2}
$$

da cui ricaviamo la stessa equazione 3.

Soluzione 2

a) La corrente che scorre nel circuito vale

$$
i = V/R
$$

Trascurando gli effetti di bordo, calcoliamo i campi in funzione della distanza r dall'asse del sistema. Per il teorema della circuitazione di Ampere, il campo magnetico è pari a quello prodotto da un filo percorso da corrente e ha andamento

$$
\mathbf{H} = \frac{i}{2\pi r}\hat{\varphi} = \frac{V}{2\pi R r}\hat{\varphi} \qquad (R_1 < r < R_2)
$$

$$
H = 0 \qquad \text{altrimenti}
$$

dove r è la distanza dall'asse del sistema e $\hat{\phi}$ è il versore tangente a cerchi centrati nell'asse del sistema.
Vale:

$$
H(d) = \frac{V}{2\pi R d} = 239\,\mathrm{A/m}
$$

Il mezzo è diamagnetico e la sua permeabilità magnetica relativa vale

$$
\mu_r = 1 + \chi_m \simeq 1
$$

ed è di fatto trascurabile tranne che per il calcolo del vettore magnetizzazione $\mathbf{M}$. Il campo di induzione magnetica vale

$$
\mathbf{B} = \mu_0\mu_r\mathbf{H} = \frac{\mu_0\mu_r i}{2\pi r}\hat{\varphi} = \frac{\mu_0\mu_r V}{2\pi R r}\hat{\varphi} \qquad (R_1 < r < R_2)
$$

$$B = 0 \qquad \text{altrimenti}$$

Vale

$$B(d) = \frac{\mu_0 \mu_r V}{2\pi R d} \simeq \frac{\mu_0 V}{2\pi R d} = 3.0 \times 10^{-4}\,\mathrm{T}$$

Il vettore magnetizzazione

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = \frac{\chi_m V}{2\pi R r}\hat{\varphi} \qquad (R_1 < r < R_2)$$

$$M = 0 \qquad \text{altrimenti}$$

considerato che $\chi_m < 0$, $\mathbf{M}$ è orientato in verso opposto rispetto a $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ (materiale diamagnetico). Vale

$$M(d) = \frac{\chi_m V}{2\pi R d} = -3.8 \times 10^{-2}\,\mathrm{A/m}$$

b) L'energia può essere ricavata integrando la densità di energia magnetica in tutto lo spazio

$$u_\mathrm{m} = \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{2} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0\mu_r V}{2\pi R r}\frac{V}{2\pi R r} = \frac{\mu_0(1+\chi_m)V^2}{8\pi^2 R^2 r^2} \qquad (R_1 < r < R_2)$$

Quindi

$$U_\mathrm{m} = \int u_\mathrm{m} d\tau$$

con $d\tau = 2\pi r \ell dr$. Quindi

$$U_\mathrm{m} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0\mu_r V^2}{8\pi^2 R^2 r^2} 2\pi r \ell dr = \frac{\mu_0\mu_r V^2}{4\pi R^2}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0\mu_r \ell V^2}{4\pi R^2}\ln\frac{R_2}{R_1} \simeq \frac{\mu_0 \ell V^2}{4\pi R^2}\ln\frac{R_2}{R_1} = 3.1 \times 10^{-5}\,\mathrm{J}$$

c) l'induttanza è legata all'energia dalla relazione

$$U_\mathrm{m} = \frac{1}{2} L i^2$$

da cui (con $i = V/R$):

$$L = \frac{2\,U_\mathrm{m}}{i^2} = \frac{\mu_0\mu_r\ell}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} \simeq \frac{\mu_0\ell}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} = 1.1 \times 10^{-6}\,\mathrm{H}$$

d) Tra il cilindro interno e quello esterno è presente una differenza di potenziale V. Il sistema di due conduttori ha capacità

$$C = \frac{2\pi\ell\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}$$

e quindi una carica per unità di lunghezza

$$\lambda = \frac{Q}{\ell} = \frac{CV}{\ell} = \frac{2\pi\epsilon_0 V}{\ln(R_2/R_1)}$$

da cui ricaviamo un campo radiale

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{V}{\ln(R_2/R_1) r} \qquad (R_1 < r < R_2)$$

Vale

$$E_r(d) = \frac{V}{\ln(R_2/R_1) d} = 1.1 \times 10^4\,\mathrm{V/m}$$

L'energia del campo elettrostatico vale

$$U_\mathrm{es} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{\pi\ell\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}V^2 = 4.6 \times 10^{-7}\,\mathrm{J}$$

e) Il vettore di Poynting vale

$$\mathbf{I}(r) = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

il vettori $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ sono ortogonali. Il vettore di Poynting è quindi assiale e vale

$$\mathbf{I}(r) = EH\hat{z} = \frac{V}{\ln(R_2/R_1) r}\frac{V}{2\pi R r}\hat{z} = \frac{V^2}{2\pi R \ln(R_2/R_1) r^2}\hat{z} \qquad (R_1 < r < R_2)$$

È interessante notare che il flusso del vettore di Poynting attraverso una sezione del sistema è pari a

$$\Phi(\mathbf{I}) = \int_{R_1}^{R_2} I 2\pi r dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{V^2}{2\pi R \ln(R_2/R_1) r^2} 2\pi r dr = \frac{V^2}{R\ln(R_2/R_1)}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{V^2}{R}$$

pari alla potenza dissipata nella resistenza (V^2/R) e alla potenza erogata dal generatore (iV).