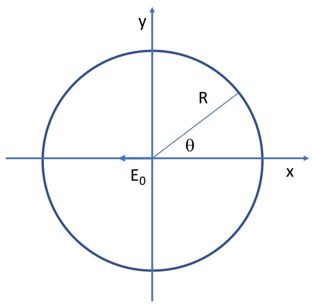
Prova Scritta Elettromagnetismo - 05.11.2021

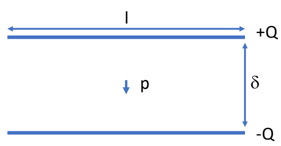
(a.a. 2020/21, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

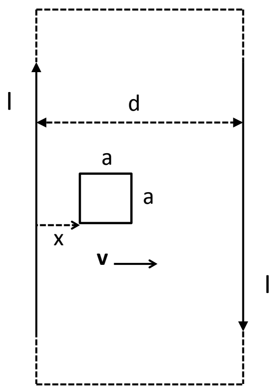
Su un piccolo anello di raggio R=1.2 mm è distribuita una carica $q = 1.2 \times 10^{-7}\,\mathrm{C}$ in modo non uniforme secondo la distribuzione $\lambda(\theta) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos\theta$ dove θ indica l'angolo rispetto all'asse x come mostrato in figura. Il campo elettrico al centro dell'anello è diretto nel verso negativo dell'asse x ed il suo modulo è pari a $|\vec{E}(0)| = E_0 = 14.2\,\mathrm{kV/m}$.
a) Si determinino i valori dei parametri λ_0 e λ_1;
b) si determini il momento di dipolo elettrico del sistema specificando modulo direzione e verso.
L'anello viene fissato al centro di un condensatore piano di superficie S= 900 cm^2 e distanza tra le armature $\delta = 5\,\mathrm{mm}$ con il momento di dipolo orientato perpendicolarmente alle armature come in figura. Il condensatore è isolato e carico con carica $Q = 3.5 \times 10^{-5}\,\mathrm{C}$. Ruotando di un piccolo angolo il momento di dipolo dell'anello si osserva un moto di piccole oscillazioni di periodo T= 1.2 s.
c) Si determini il momento d'inerzia dell'anello.
Successivamente l'anello viene riportato con il suo momento di dipolo in condizione di equilibrio e viene lasciato libero di muoversi.
d) Sapendo che la massa dell'anello è pari a m=3 g determinare verso quale armatura si dirige l'anello e quanto tempo impiega a raggiungerla.





Esercizio 2

Una spira rettangolare è formata da due fili paralleli distanti $d = 10\,\mathrm{cm}$ e di lunghezza $\gg d$, connessi alle loro estremità come in figura. Una spira quadrata di lato $a = d/4$ e resistenza $R = 0.2\,\Omega$ giace nel piano dei due fili lunghi a una distanza $x_{\mathrm{iniziale}} = b = d/6$ dal filo a sinistra come in figura.
Si determini:
a) il coefficiente di mutua induzione tra le due spire nella posizione indicata;
b) la corrente indotta nella piccola spira quadrata quando nella spira grande scorre una corrente $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$;
c) la corrente indotta in funzione della posizione nella spira piccola se la corrente nella spira grande è $I = 100$ A costante, e la spira piccola si muove con velocità $\vec{v} = v\hat{x}$ dove $v = 20\,\mathrm{m/s}$. Se ne dia il valore quando la spira piccola si trova al centro tra i fili lunghi;
d) la forza da applicare alla spira piccola per tenerla in moto alla velocità $\vec{v}$ quando la sua distanza dal filo lungo a sinistra è pari ad a.
Si trascuri l'autoinduzione delle due spire.



Soluzione 1

a) Imponiamo le condizioni sulla carica totale q e sul valore del campo elettrico E_0.

$$q = \int_0^{2\pi} \lambda(\theta) R d\theta = \lambda_0 R \int_0^{2\pi} d\theta + \lambda_1 R \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 2\pi\lambda_0 R$$

$$E_0 = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda(\theta)R}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta + \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{\lambda_1}{4\epsilon_0 R}$$

da cui ricaviamo le due costanti:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{q}{2\pi R} = 1.6 \times 10^{-5} \text{ C/m} \\ \lambda_1 &= 4\epsilon_0 E_0 R = 6.0 \times 10^{-10} \text{ C/m} \end{aligned}$$

b) Da considerazioni di simmetria otteniamo che il momento di dipolo elettrico del sistema è diretto come l'asse x. Calcoliamo la componente x

$$p_x = \int_0^{2\pi} \lambda(\theta) R d\theta R \cos\theta = R^2 \left(\lambda_0 \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta + \lambda_1 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \right) = \lambda_1 R^2 \pi$$

da cui il vettore dipolo elettrico:

$$\vec{p} = p_x \hat{x} = \lambda_1 R^2 \pi \hat{x}$$
$$|\vec{p}| = 2.7 \times 10^{-15} \text{ Cm}$$

Il verso è quello positivo dell'asse x.

c) All'interno del condensatore si ha un campo elettrico ortogonale alle armature, diretto dall'alto verso il basso e di modulo:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{S\epsilon_0}$$

inclinando l'asse x dell'anello di un angolo piccolo α, l'anello subisce un momento torcente di modulo:

$$M = p_x E \sin\alpha \sim \frac{\lambda_1 R^2 \pi Q}{S\epsilon_0}\alpha$$

per cui la seconda equazione cardinale della meccanica applicata all'anello, detto I_a il momento di inerzia dell'anello, sará dato da:

$$I_a \ddot{\alpha} = -M$$

da cui otteniamo l'equazione

$$\ddot{\alpha} + \frac{\lambda_1 R^2 \pi Q}{I_a S\epsilon_0}\alpha = 0$$

Identificando il coefficiente di α con Ω^2 ricaviamo I_a.

$$I_a = \lambda_1 R^2 \pi Q \Omega^2 S\epsilon_0 = \frac{\lambda_1 R^2 Q T^2}{4\pi\epsilon_0 S} = 4.3 \times 10^{-9} \text{ kg m}^2$$

d) L'anello, avendo una carica netta q, una volta lasciato libero di muoversi subisce la forza elettrica e si muove in direzione dell'armatura con carica negativa (essendo positiva la sua carica netta). L'equazione del moto dell'anello é la seguente:

$$ma = qE = \frac{qQ}{S\epsilon_0}$$

Essendo la forza costante, si avrá un moto uniformemente accelerato di accelerazione a

$$a = \frac{qQ}{mS\epsilon_0}$$

e il tempo impiegato per percorrere uno spazio pari a $\delta/2$ é dato da:

$$t = \sqrt{\frac{S\delta\epsilon_0 m}{qQ}} = 1.7 \text{ ms}$$

Soluzione 2
a)
Nell'approssimazione di lati della spira grande molto lunghi rispetto alla loro distanza possiamo considerare i due fili come infiniti percorsi dalla corrente I in versi opposti. A distanza x' dal filo a sinistra, il campo entra perpendicolarmente nel foglio con modulo:

$$B(x') = \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\left[\frac{1}{x'} + \frac{1}{d-x'}\right]$$

Il flusso di B concatenato con la piccola spira a distanza x dal filo di sinistra è:

$$\Phi(x) = \int_x^{x+a} B(x')\, a\, dx' = \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\int_x^{x+a}\left[\frac{1}{x'} + \frac{1}{d-x'}\right] a\, dx'$$

$$\Phi(x) = \frac{\mu_0\, a\, I}{2\pi}\left[\ln\frac{x+a}{x} - \ln\frac{d-x-a}{d-x}\right]$$

Nel caso di $x = b = d/6$, sostituendo anche $a = d/4$, si trova:

$$\Phi(b) = \frac{\mu_0\, a\, I}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{b+a}{b}\right) - \ln\left(\frac{d-b-a}{d-b}\right)\right]$$

$$\Phi(b) = \frac{\mu_0\, d}{8\pi}\ln\left(\frac{25}{7}\right) I$$

e il coefficiente di mutua induzione è:

$$M = \frac{\mu_0\, d}{8\pi}\ln\left(\frac{25}{7}\right) = 6.36 \text{ nH}$$

b)
Per una corrente nei fili pari a $I(t) = I_0\cos\omega t$ la corrente indotta è:

$$i(t) = -\frac{M}{R}\frac{dI}{dt} = \frac{\mu_0\, d}{8\pi R}\ln\left(\frac{25}{7}\right) I_0\,\omega\sin\omega t$$

c)
Se la spira piccola si muove in direzione x con velocità v, si ottiene:

$$i(x) = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(x)}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{\mu_0 dI}{8\pi R}\left[\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x-a} - \frac{1}{d-x}\right] v$$

Con riferimento al campo B positivo entrante nel foglio, la corrente positiva nella spira ha verso orario. La corrente è positiva quando la piccola spira è più vicina al filo di sinistra e poi diminuisce mentre la spira si sposta verso destra fino ad annullarsi quando la spira è al centro tra i fili. Poi diventa negativa e aumenta in modulo.
La corrente quando la piccola spira si trova al centro tra i fili paralleli, cioé per $x = d/2 - a/2 = 3d/8$, è nulla ($i = 0$) come aspettato per la simmetria del sistema.

d)
Ricordando la forza tra due fili paralleli percorsi da correnti ci aspettiamo una forza sulla spira totale negativa (in x) quando la piccola spira si trova più vicina al filo di sinistra.
Per la posizione col lato 1 (a sinistra) della piccola spira a distanza a dal filo di sinistra, la forza è:

$$F_{1x} = i(a)\, a\, B(a) = -\frac{\mu_0}{2\pi R}\frac{Iv}{3}\, a\, \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\frac{4}{3a}$$

sul lato 2:

$$F_{2x} = i(a)\, a\, B(2a) = \frac{\mu_0}{2\pi R}\frac{Iv}{3}\, a\, \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\frac{1}{a}$$

e quindi:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = -\frac{\mu_0}{2\pi R}\frac{Iv}{3}\frac{\mu_0\, I}{2\pi}\frac{1}{3} = -\left(\frac{\mu_0\, I}{6\,\pi}\right)^2\frac{v}{R} = -4.4\cdot 10^{-9}\text{ N}$$

Per mantenere la spira a velocità v si deve quindi applicare una forza esterna $F_{e_x} = -F_x = 4.4\cdot 10^{-9}$ N.