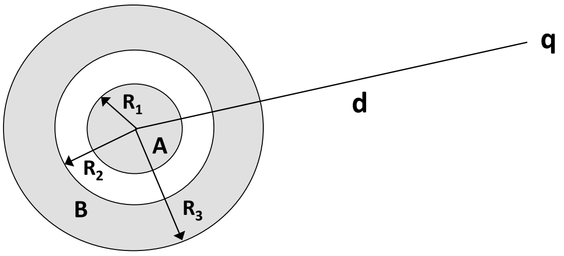
Prova Scritta Elettromagnetismo - 20.01.2022

(a.a. 2020/21, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

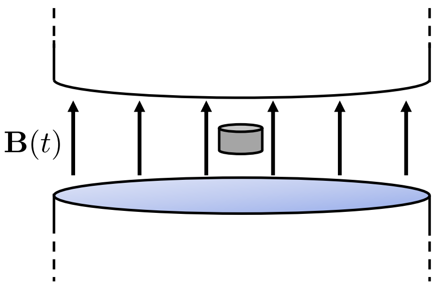
Esercizio 1

Su un conduttore sferico A di raggio R_1=40 cm è depositata una quantità di carica Q_A. Il conduttore A è posto al centro di una calotta sferica conduttrice B di raggio interno R_2=50 cm e raggio esterno R_3=70 cm.
Sul conduttore B è depositata una quantità di carica Q_B. La differenza di potenziale tra i conduttori B ed A è $V(R_2)-V(R_1)$ = - 4.5·10^3 V e l'intensità della forza repulsiva a cui è sottoposta una carica di prova $q = 1.3 \cdot 10^{-10}$ C, posta all'esterno del sistema a distanza d =2.0 m dal centro O, è $F = 1.5 \cdot 10^{-6}$ N.
Assumendo che la presenza della carica q non alteri in maniera apprezzabile la distribuzione delle cariche sui conduttori, determinare:
a) il valore della quantità di carica presente su ciascuno dei due conduttori;
b) il potenziale dei due conduttori rispetto al potenziale nullo all'infinito;
c) si tracci un grafico del campo elettrico in funzione della distanza dal centro O;
Successivamente nello spazio tra i due conduttori viene inserito un dielettrico liquido di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 3$.
Si determini:
d) i nuovi potenziali dei due conduttori;
e) la variazione di energia elettrostatica del sistema dei due conduttori tra dopo e prima dell'inserimento del dielettrico.



Esercizio 2

Un elettromagnete alimentato a corrente alternata ha le espansioni polari a sezione circolare di area A e un traferro di spessore $d \ll \sqrt{A}$. Il campo d'induzione magnetica $\vec{B}$ nel traferro è spazialmente uniforme e il suo modulo varia nel tempo secondo la legge $B = B_0 \sin(\omega t)$, con $B_0 = 0.060\,\mathrm{T}$ e $\omega = 500\,\mathrm{rad/s}$. Un cilindretto di argento (resistività elettrica $\rho = 1.6 \times 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}$) di raggio $a = 2.5\,\mathrm{cm}$ e altezza $h = 3.0\,\mathrm{cm}$ è posto nel traferro con asse coincidente con quello delle espansioni del magnete.
Si determini:
a) Il campo elettrico indotto, specificando la forma geometrica delle linee di forza, la loro direzione, il verso e l'espressione analitica della sua dipendenza dal tempo;
b) la potenza w dissipata per unità di volume nel cilindretto di argento, in funzione del tempo e delle coordinate;
c) la potenza totale W dissipata nel cilindretto, mediata nel tempo, incluso il valore numerico;
d) il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale del cilindretto in funzione del tempo, calcolando il suo valore massimo $\Phi_{\max}$ e il suo valore mediato nel tempo $\langle \Phi \rangle$.
Nota: Si considerino trascurabili l'effetto della corrente di spostamento e gli effetti di autoinduzione nel cilindretto.



Soluzione 1

a)

La d.d.p. tra i due conduttori è:

$$V(R_2) - V(R_1) = -\int_{R_1}^{R_2} E\,dr = \int_{R_2}^{R_1} \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0}\frac{R_1 - R_2}{R_2 R_1}$$

$$Q_A = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}\,[V(R_1) - V(R_2)] = C_{12}\,[V(R_1) - V(R_2)] = 1,0\ \mu\text{C}$$

avendo indicato con C_{12} la capacità del condensatore sferico composto dal conduttore A e dalla superficie interna del conduttore B:

$$C_{12} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 222,6\ \text{pF}$$

Nel sistema sferico, ai fini del campo elettrico esterno (dal teorema di Gauss), la carica totale dei due conduttori si può pensare posta nel centro:

$$E(d) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_A + Q_B}{d^2}$$

La forza sulla carica di prova è:

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_A + Q_B}{d^2}$$

e si ricava:

$$Q_A + Q_B = \frac{4\pi\epsilon_0}{q}\,F\,d^2 \qquad\qquad Q_B = \frac{4\pi\epsilon_0}{q}\,F\,d^2 - Q_A = 4,14\ \mu\text{C}$$

b)

Per il potenziale del guscio esterno possiamo scrivere:

$$V(R_3) - V(\infty) = \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_A + Q_B}{r^2}\,dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_A + Q_B}{R_3} = 65,9\ \text{kV}$$

Il potenziale del conduttore interno è:

$$V(R_1) = [V(R_1) - V(R_2)] + V(R_3) = 70,4\ \text{kV}$$

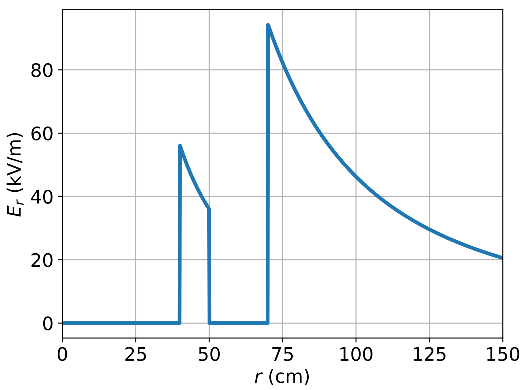
c)

Il campo elettrico è radiale e vale

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_A}{r^2} \qquad \text{per } R_1 \le r < R_2$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_A + Q_B}{r^2} \qquad \text{per } r \ge R_2$$

Il grafico che traccia il campo elettrico è riportato in figura.



d)
All'esterno della calotta sferica non cambia nulla e quindi il potenziale $V(R_3)$ non cambia. Cambia la d.d.p. tra la sfera interna e la calotta sferica. Usando l'espressione trovata in precedenza:

$$V'(R_1) - V(R_2) = \frac{Q_A}{C'_{12}} \qquad\qquad V'(R_1) = V(R_2) + \frac{Q_A}{C'_{12}} = 67,4 \text{ kV}$$

essendo C'_{12} la capacità del condensatore sferico con il dielettrico:

$$C'_{12} = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \, \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \epsilon_r \, C_{12}$$

e)
Trattando il sistema come una serie di condensatori possiamo scrivere:

$$U_i = \frac{1}{2}\frac{Q_A^2}{C_{12}} + \frac{1}{2}\frac{(Q_A + Q_B)^2}{C_3} \qquad\qquad C_3 = 4\pi\epsilon_0 \, R_3$$

$$U_f = \frac{1}{2}\frac{Q_A^2}{C'_{12}} + \frac{1}{2}\frac{(Q_A + Q_B)^2}{C_3}$$

ne segue:

$$U_f - U_i = \frac{1}{2}\,Q_A^2 \left(\frac{1}{C'_{12}} - \frac{1}{C_{12}}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{Q_A^2}{C_{12}}\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} = -1.5 \text{ mJ}$$

Soluzione 2
a)
Per la simmetria cilindrica del sistema, le linee di forza del campo elettrico sono circonferenze centrate nell'asse del sistema. Possiamo scrivere la III eq di Maxwell in forma integrale

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{B})$$

e calcolare gli integrali su un cerchio di raggio r centrato sull'asse. Vale

$$\begin{aligned} 2\pi r E_\phi &= -\frac{d}{dt}B(t)\pi r^2 \\ &= -\omega B_0 \cos(\omega t)\pi r^2 \end{aligned}$$

e quindi

$$E_\phi(r) = -\frac{\omega B_0}{2} r \cos(\omega t)$$

Le linee di forza del campo elettrico sono delle circonferenze centrate nell'asse del sistema, dirette in verso orario durante la crescita del valore del campo magnetico verso l'alto. **b)**
La potenza per unità di volume vale

$$w = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

con

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\rho}\mathbf{E}$$

e quindi

$$w(r,t) = \frac{E^2}{\rho} = \frac{\omega^2 B_0^2}{4\rho} r^2 \cos^2(\omega t)$$

c)
Integrando sul volume del cilindretto, si ha

$$W(t) = \int_0^a w(r,t) 2\pi r h dr = \frac{\pi\omega^2 B_0^2}{8\rho} a^4 h \cos^2(\omega t)$$

Considerando che la media temporale della funzione $\cos^2(\omega t)$ vale $1/2$, la potenza media vale

$$\langle W \rangle = \frac{\pi\omega^2 B_0^2}{16\rho} a^4 h = 129\,\mathrm{W}$$

b)
Il vettore di Pointing è radiale, e vale

$$\mathbf{I}(r) = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{EB}{\mu_0}\hat{r} = -\frac{\omega B_0^2}{2\mu_0} \cos(\omega t)\sin(\omega t)\mathbf{r}$$

Il suo flusso sulla superficie laterale del cilindro vale

$$\Phi(\mathbf{I}) = 2\pi a h I(a) = -\frac{\pi h a^2 \omega B_0^2}{\mu_0} \cos(\omega t)\sin(\omega t) = -\frac{\pi h a^2 \omega B_0^2}{\mu_0} \frac{\sin(2\omega t)}{2}$$

Il valore massimo vale

$$\Phi_{\max} = \frac{\pi h a^2 \omega B_0^2}{2\mu_0} = 42\,\mathrm{W/m^2}$$

e il suo valore medio nel tempo vale

$$\langle \Phi \rangle = 0$$