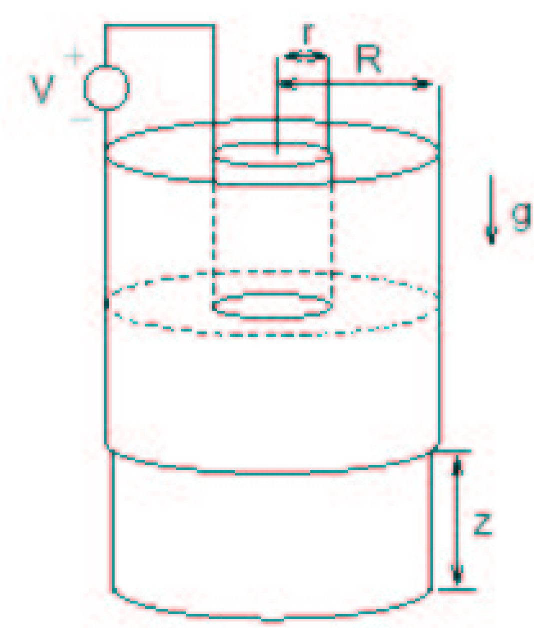
Esercizio 1

Un condensatore cilindrico è costituito da due armature di altezza h e raggi esterno ed interno R e r. All'interno del condensatore é presente un dielettrico isotropo con costante dielettrica ϵ e massa m. Il dielettrico é libero di scorrere senza attrito in direzione longitudinale rispetto alle armature del condensatore ed è soggetto all'azione del campo gravitazionale g. Le armature del condensatore sono mantenute ad una differenza di potenziale V da un opportuno generatore. Detta z l'altezza della porzione di dielettrico che emerge dal fondo del condensatore, calcolare:

1. la capacità C(z) del condensatore in funzione dell'altezza z.
2. le distribuzioni della densità di carica presenti sulle armature.
3. la forza totale agente sulla lastra di dielettrico specificandone il verso.
4. il potenziale V_0 col quale il dielettrico può essere mantenuto in equilibrio.

Supponendo che il condensatore sia mantenuto alla differenza di potenziale V_0 e che il dielettrico sia parzialmente inserito fra le sue armature, calcolare:

5. il lavoro fatto dal generatore quando il dielettrico viene spostato di una quantità δz e la variazione dell'energia totale del sistema a seguito dello spostamento.



Soluzione 1

1) La capacità C(z) totale è data dal parallelo di due condensatori cilindrici, uno di altezza z in aria e uno di altezza h-z con dielettrico:

$$C(z) = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln R/r}[z + (h-z)\frac{\epsilon}{\epsilon_0}]$$

2) La distribuzione di carica sull'armatura interna del condensatore in aria è:

$$\sigma_{aria} = \frac{Q}{2\pi r z} = \frac{CV}{2\pi r z} = \frac{V\epsilon_0}{r\ln(R/r)}$$

Se si impongono le condizioni al contorno per la componente di $\vec{E}$ parallela alla superficie superiore del cilindro dielettrico si ha:

$$\vec{E}_{||\text{aria}}(\vec{r}) = \vec{E}_{||\text{diel}}(\vec{r}) \text{ quindi } \frac{D_{||\text{aria}}(\vec{r})}{\epsilon_0} = \frac{\vec{D}_{||\text{diel}}(\vec{r})}{\epsilon}$$

Applicando il teorema di Gauss al campo $\vec{D}$:

$$\frac{\sigma_{\text{aria}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{\text{diel}}}{\epsilon}$$

si ricava σ_{diel}.

3) L'energia totale del sistema condensatore, dielettrico e generatore è:

$$E = T - mgz + \frac{1}{2}C(z)V^2 + U_{\text{gen}}$$

Per uno spostamento del dielettrico δz, e quindi per una variazione della capacità del condensatore, la variazione di energia interna del generatore è: $\delta U_{\text{gen}} = -\delta q V = -\delta C V^2$. La forza agente sulla lastra si ottiene derivando l'energia totale:

$$F_{\text{diel}} = -F_z = mg + \frac{1}{2}\frac{\partial C}{\partial z}V^2 = mg - \frac{1}{2}\frac{2\pi\epsilon_0 V^2}{\ln(R/r)}[\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1]$$

ove il contributo del campo elettrostatico è diretto in modo da attrarre il dielettrico all'interno del condensatore, dal momento che la derivata della capacità rispetto alle variazioni di z è negativa.

4) Al potenziale V_0 la forza totale agente sul dielettrico è nulla, quindi:

$$V_0^2 = \frac{mg\ \ln(R/r)}{\pi\epsilon_0[\epsilon/\epsilon_0 - 1]}$$

5) Si calcola facilmente sostituendo il valore V_0 per il potenziale nella formula dell'energia del generatore; la variazione di energia del sistema condensatore-dielettrico è pari al lavoro fatto dal generatore.