Esercizio 2

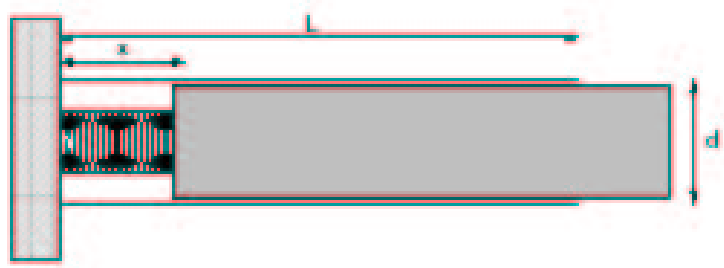
È dato un condensatore piano isolato, costituito da due armature quadrate di lato L poste a distanza $d \ll L$. All'interno del condensatore è presente una lastra di dielettrico con costante ϵ che se inserita in modo completo occupa interamente lo spazio tra le armature. La lastra è agganciata ad una molla di costante K e lunghezza a riposo L, fissata ad un estremo come mostrato in figura. Sia $\pm Q$ la carica presente sulle armature. Trascurando gli effetti di bordo, calcolare:

a) la capacità C(x) del condensatore in funzione della distanza x, indicata in figura.

b) la distribuzione della densità di carica presente sulle armature.

c) la forza agente sul dielettrico.

d) il lavoro necessario per spostare la lastra da una posizione generica $0 < x < L$ alla posizione x = L.



Soluzione 2

a) Il condensatore si può vedere come il parallelo tra due condensatori, uno in aria e uno con dielettrico, per cui la capacità si ottiene facilmente:

$$C(x) = [\epsilon_0\, x/L + \epsilon(1 - x/L)]\frac{S}{d}$$

b) Le condizioni al contorno sulla superficie di separazione tra dielettrico e aria, che impongono la continuità della componente $E_{||}$ tangente alla superficie (che avrà la direzione z), permettono di calcolare la densità di carica sulle superfici delle armature. Infatti

$$\sigma_{\text{aria}} = \epsilon_0 E_z \quad \text{e anche} \quad \frac{\sigma_{\text{aria}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{\text{diel}}}{\epsilon}$$

Conscendo la capacità e sapendo che il campo è uniforme tra le due armature possiamo scrivere $Q = CV = CE_z d$ e sostituendo E_z nelle formule di densità, si ottiene:

$$\sigma_{\text{aria}} = \frac{\epsilon_0 Q}{\epsilon_0 xL + \epsilon(1-x)L}\,, \quad \sigma_{\text{diel}} = \frac{\epsilon Q}{\epsilon_0 xL + \epsilon(1-x)L}$$

c) L'energia totale del sistema è data da:

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x-L)^2 + \frac{Q^2}{2C(x)}$$

Per uno spostamento dx, dU = F dx, per cui la forza si ottiene per derivazione:

$$F(x) = -k(x-L) + \frac{Q^2}{2C^2(x)}\frac{dC}{dx}$$

d) Il lavoro si ottiene dalla variazione di energia calcolata ΔU:

$$L = \frac{Q^2}{2C(L)} - 1/2k(x-L)^2 + \frac{Q^2}{2C(x)}$$