Compito scritto del Corso di Elettromagnetismo A.A. 2007/2008

3 Luglio 2008

(Proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese)

L'esame **scritto di Elettromagnetismo** *è articolato nei tre esercizi n.1, n. 3 e n. 4 ed il tempo a disposizione per lo svolgimento é di 4 ore.*
Coloro che intendo **recuperare uno degli esoneri** *devono svolgere nel tempo di 1.5 ore*

1. *l'esercizio n.1 per il primo esonero,*
2. *l'esercizio n.2 per il secondo esonero,*
3. *l'esercizio n.4 per il terzo esonero.*

Gli studenti del **precedente ordinamento** *che intendono sostenere l'esame scritto del modulo di*

1. *Elettricita e Magnetismo, devono svolgere in 3 ore gli esercizi.1 e 2.*
2. *Elettromagnetismo, devono svolgere in 3 ore gli esercizi n. 3 e 4.*

Esercizio 1

Un corpo é costituito da una sfera di raggio $R = 1.0\ cm$ con densità uniforme di carica $\rho = 12.0 \cdot 10^{-7}\ C/m^3$ e da una carica puntiforme di valore uguale ed opposto alla carica totale distribuita sulla sfera. La carica puntiforme é posta a distanza $R/2$ dal centro della sfera.

Si determini il modulo, la direzione e il verso del momento di dipolo elettrico di tale corpo.

Una seconda carica puntiforme $Q = 1.0 \cdot 10^{-5}\ C$, é situata nell'origine del sistema di coordinate. Posto il corpo a grande distanza dall'origine lungo l'asse y, $y^* = 40\ cm$, con il momento di dipolo orientato come l'asse z, si calcoli:

1. l'energia potenziale del sistema
2. la forza agente sul corpo
3. il momento meccanico agente sul corpo

Esercizio 2

Un piccolo granello di polvere con dimensioni lineari caratteristiche di $r = 10\ \mu m$ inizialmente fluttua lentamente a grande distanza da una sfera di raggio $R = 20\ cm$ elettricamente carica con $Q = 1.9 \cdot 10^{-7}\ C$. Supponendo di rappresentare il granello come una sferetta di raggio r, si determini:

1. l'espressione analitica del momento del dipolo del granello quando è a distanza x dalla sfera carica;
2. la velocità con cui il granello colpisce la sfera carica, nell'ipotesi che a grande distanza esso sia praticamente fermo;
3. la forza d'adesione del granello sulla sfera carica.

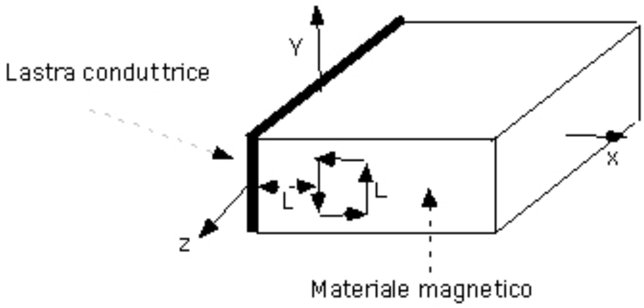
Per il calcolo numerico si assuma come densità δ e costante dielettrica relativa ϵ_r del granello di polvere rispettivamente $\delta = 2.2\ gr/cm^3$, $\epsilon_r = 3.8$.

Esercizio 3

Una lastra conduttrice piana, infinitamente estesa e di spessore trascurabile, é percorsa da una corrente elettrica di densità superficiale uniforme. La lastra giace sul piano yz del sistema di riferimento scelto (vedi figura), la corrente elettrica scorre nella direzione dell'asse z ed il suo valore per unità di lunghezza è $J_l = 6.4 \cdot 10^4\ A/m$.

Ad una faccia di questa lastra conduttrice è attaccato del materiale magnetico la cui permeabilità magnetica relativa cambia con la distanza x dalla lastra secondo la legge $\mu_r(x) = 1 + ke^{-x/\lambda}$, dove $k = 87$ e $\lambda = 32\ m$. Assumendo che il materiale magnetico riempia tutto il semispazio $x > 0$ e che dall'altra parte della della lastra ($x < 0$) vi sia spazio vuoto, si determini:

1. la direzione ed il verso del campo magnetico $\vec{H}$, sulla base delle equazioni di Maxwell e dell'invarianza delle grandezze in gioco per traslazioni parallele al pianox, y;
2. il valore dei moduli di $\vec{H}$, di $\vec{B}$ e di $\vec{M}$ nel punto a distanza $L = 25\ cm$ a destra della lastra (vedi figura);
3. l'espressione della corrente di magnetizzazione di volume $\vec{J}_{mv}$ calcolata nel punto generico x ed il valore di quella di superficie $\vec{J}_{ms}$ nei punti a contatto con la lastra conduttrice ($x = 0$);
4. il valore della circuitazione di $\vec{B}$ e di $\vec{H}$ lungo il percorso quadrato di lato L disegnato in figura e posizionato ad una pari distanza L dalla lastra.



Esercizio 4

Un elettromagnete alimentato a corrente alternata ha le espansioni polari a sezione circolare di area A ed un traferro di spessore $d << \sqrt{A}$. Il campo d'induzione magnetica $\vec{B}$ nel traferro è spazialmente uniforme ed il suo modulo cambia nel tempo secondo la legge $B = B_o sin(2\pi\nu t)$.

Un cilindretto di rame di raggio a ed altezza h è posto nel traferro con asse coincidente con quello delle espansioni del magnete.

Determinare:

1. Il campo elettrico indotto, specificando la forma geometrica delle linee di forza, la loro direzione, il verso e l'espressione analitica della sua dipendenza dal tempo;
2. la potenza dissipata per unitá di volume nel cilindretto di rame;
3. la potenza dissipata in media nel cilindretto;
4. si calcoli infine il flusso del vettore di Poynting attraverso la superfice laterale del cilindretto di rame.

Si assuma la resistività del rame $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega m$, $B_o = 0.5\ T$, $a = 1.5\ cm$, $h = 3.0\ cm$ e $\nu = 50\ Hz$. Si consideri trascurabile l'effetto della corrente di spostamento e gli effetti di autoinduzione nel cilindretto di rame.

Soluzione

Esercizio 1

La carica positiva della sfera è

$$q = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 = 5 \cdot 10^{-11}\ C$$

Essendo posta ad $R/2$ dal baricentro della carica postiva la carica negativa puntiforme $-q$, ne segue che il momento di dipolo associato al sistema complessivamente neutro ha modulo

$$p = q\frac{R}{2} = \frac{2}{3}\pi\rho R^4 = 2.5 \cdot 10^{-14}\ Cm$$

il dipolo è orientato dalla carica puntiforme negativa al centro della sfera.

a) Il campo elettrico generato dalla carica Q posta nell'origine del sistema di riferimento ha componenti:

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

L'energia potenziale di un dipolo in un campo elettrico è:

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

Essendo $\vec{p}$ diretto parallelo all'asse z, U è:

$$U = -pE_z = -\frac{pQ}{4\pi\epsilon_o}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

b)In generale la forza esercitata sul corpo é data

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = \vec{\nabla}(pE_z) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{pQ}{4\pi\epsilon_o}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}})\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{pQ}{4\pi\epsilon_o}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}})\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{pQ}{4\pi\epsilon_o}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}})\hat{z}$$

Ponendo $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$

$$\vec{F} = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_o}\Big[-\frac{3xz}{r^5}\hat{x} - \frac{3yz}{r^5}\hat{y} + \frac{r^2-3z^2}{r^5}\hat{z}\Big]$$

poichè il dipolo è posto nel punto di coordinate $(0, y^*, 0)$ ne segue che la forza è

$$\vec{F} = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_o}\frac{1}{{y^*}^3}\hat{z} \qquad |\vec{F}| = 3.5 \cdot 10^{-8}\ N$$

c) Il momento della forza è ottenuto applicando la formula

$$\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}$$

Ricordando che $\vec{p}$ è diretto come z otteniamo:

$$\vec{M} = -pE_y\hat{x} + pE_x\hat{y}$$

Esplicitando le componenti del campo elettrico ed imponendo al solito che il dipolo è nel punto di coordinate $(0, y^*, 0)$ si ottiene:

$$\vec{M} = -\frac{pQ}{4\pi\epsilon_o}\frac{1}{{y^*}^2}\hat{x} \qquad |\vec{M}| = 1.4 \cdot 10^{-8}\ Nm$$

Esercizio 2 1) Calcoliamo il modulo del vettore polarizzazione $\vec{P}$ nel punto x ove si trova il granello di polvere .

$$P = \epsilon_o(\epsilon_r - 1)E = \frac{1}{4\pi}\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r}\frac{Q}{x^2}$$

Per dedurre il momento di dipolo del granello moltiplichiamo P per il volume del granello:

$$p = \frac{r^3}{3}\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r}\frac{Q}{x^2}$$

2) La velocità d'impatto si calcola applicando la conservazione dell'energia. Ricordando che la sua energia potenziale è $U - \vec{p} \cdot \vec{E}$, si ha:

$$U = -\frac{r^3}{12\pi\epsilon_o}\frac{(\epsilon_r - 1)}{{\epsilon_r}^2}\frac{Q^2}{x^4}$$

Infine, detta $m = \frac{4\pi r^3}{3}\delta = 9.2 \cdot 10^{-12}\ kg$ la massa dl granello , otteniamo:

$$v = \sqrt{m\frac{r^3}{6\pi\epsilon_o}\frac{(\epsilon_r - 1)}{{\epsilon_r}^2}\frac{Q^2}{R^4}} = 2.6 \cdot 10^{-15} m/s$$

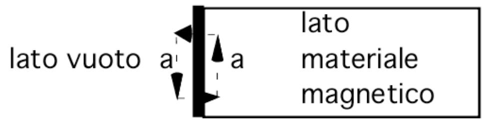
3) La forza d'adesione si deduce calcolando per $x = R$ dalla relazione $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$

$$F = -\frac{5r^3}{12\pi\epsilon_o}\frac{(\epsilon_r - 1)}{{\epsilon_r}^2}\frac{Q^2}{R^5} = -1.8 \cdot 10^{-21} N$$

Esercizio 3

1) Sulla base della terza equazione di Maxwell possiamo affermare che le linee di forza del campo magnetico $\vec{H}$ devono essere concatenate con la corrente elettrica. Quest'ultima scorre lungo z ed è uniformemente distribuita lungo la lastra conduttrice. Essendo la lastra stessa infinitamente estesa lungo l'asse y il campo $\vec{H}$ è invariante per traslazione lungo questo asse, così che le linee di forza devono estendersi lungo questa direzione chiudendosi poi all'infinito. Deduciamo quindi che $\vec{H}$ è parallelo all'asse y nel semispazio $x > 0$ ed antiparalleo per $x < 0$.

2) Applichiamo il teorema della circuitazione ad un rettangolo disegnato in modo che zy ne sia piano di simmetria.



Detta a la lunghezza del lato del rettangolo parallelo al piano yz, abbiamo:

$$H_v a + H_m a = J_l \ a$$

Di nuovo per ragioni di simmetria il campo magnetico H_v a sinistra del piano yz è pari al valore del campo H_m a destra. Ne segue che

$$H_v = H_m = \frac{1}{2} J_l = 32000 \quad Aspire/m$$

Quindi i moduli di $\vec{B}$ e $\vec{H}$ nel punto $x = L$ sono:

$$B = \frac{1}{2}\mu_o \mu_r(L) J_l = 3.5 \quad T \qquad\qquad M = \frac{1}{2}(\mu_r(L) - 1) J_l = 2.8 \cdot 10^6 \quad Aspire/m$$

3) La corrente di magnetizzazione di superficie è deducibile dalla relazione

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \vec{n} \qquad\qquad J_{ms} = \frac{1}{2}(\mu_r(x) - 1) J_l$$

che in $x = 0$ é:

$$\vec{J}_{ms}(x = 0) = \frac{1}{2} k_o J_l \hat{z} \qquad J_{ms}(x = 0) = 2.8 \cdot 10^6 \quad A/m$$

$$\vec{J}_{mv} = \vec{\nabla} \times \vec{M} \qquad\qquad J_{mv} = \frac{1}{2}\frac{d\mu_r(x)}{dx} J_l = -\frac{1}{2\lambda} k_o e^{-x/\lambda} J_l$$

4) La circuitazione di $\vec{H}$ è nulla, mentre per la circuitazione $C_B$di $\vec{B}$ lungo il circuito in figura si ha:

$$C_B = [-B(L) + B(2L)]L = \frac{L}{2}\mu_o J_l [\mu_r(2L) - \mu_r(L)] = \frac{L}{2}\mu_o J_l k_o [k_o e^{-2L/\lambda} - e^{-L/\lambda}] = -6.7 \cdot 10^{-3} \quad Tm$$

Esercizio 4

Il problema ha simmetria cilindrica. Quindi sulla base della legge di Faraday-Neumann-Lenz in forma puntuale $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, concludiamo che le linee di forza del campo elettrico sono circonferenze concentriche giacenti su piani perpendicolari all'asse del sistema e con centri su tale asse.

Per calcolare il campo calcoliamo la circuitazione del campo elettrico lungo una di queste circonferenze di raggio generico r. Otteniamo

$$E 2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} \qquad\qquad E = -r\pi\nu B_o cos(2\pi\nu t)$$

La densità di corrente nel cilindro di rame è:

$$J = \frac{E}{\rho} = -r\frac{\pi}{\rho}\nu B_o cos(2\pi\nu t)$$

e la densità di potenza dissipata, $w = \vec{E} \cdot \vec{J}$, essenso $\vec{J}$ parallelo a $\vec{E}$ è:

$$w = EJ = r^2\frac{1}{\rho}\pi^2\nu^2 {B_o}^2 cos^2(2\pi\nu t)$$

Integrando sul volume del cilindro otteniamo la potenza totale istantanea W

$$W = \int_0^a r^2\frac{1}{\rho}\pi^2\nu^2 {B_o}^2 cos^2(2\pi\nu t) 2\pi r h dr = -\frac{h}{2\rho}\pi^3\nu^2 a^4 {B_o}^2 cos^2(2\pi\nu t)$$

che mediato sul periodo $T = \frac{1}{\nu}$ da

$$< W >= -\frac{h}{4\rho}\pi^3\nu^2 a^4 {B_o}^2 = 433 \quad W$$

Infine il flusso del vettore di Poynting sulla superficie laterale del cilindro è:

$$\Phi(\vec{S}) = 2\pi a h B E = -2\pi^2 a^2 h \nu {B_o}^2 cos(2\pi\nu t) sin(2\pi\nu t)$$

che mediato su un periodo T è

$$< \Phi(\vec{S}) >= 0$$