

Esercizio Supplementare per il compito di Elettività e Magnetismo (trimestrale) dell' 8-9-2008

Un condensatore cilindrico di raggio interno $R_1 = 3$ cm ed esterno $R_2 = 10$ cm è riempito di una sostanza di costante elettrica relativa ϵ_r , fino a metà larghezza (da R_1 a $R_m = R_1 + (R_2 - R_1)/2$). Calcolare quanto deve valere ϵ_r affinché l'energia elettrostatica nel dielettrico sia uguale a quella contenuta nello spazio vuoto rimanente entro il condensatore.

Calcolare inoltre la densità superficiale di carica di polarizzazione che appare sulla superficie di separazione dielettrico-vuoto quando alle armature del condensatore è applicata una differenza di potenziale $V = 700$ Volt.

Si indichi con l la lunghezza del condensatore. Si considerino trascurabili gli effetti di bordo.

Soluzione.

La capacità di un condensatore cilindrico è $C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}$.

Il condensatore può essere visto come un sistema di due condensatori in serie di capacità:

C_1 e C_2 .

$$C_1 = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln \frac{R_m}{R_1}} \quad C_2 = \frac{2\pi \epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_m}}$$

Essendo in serie $Q_1 = Q_2$ quindi: $C_1 \Delta V_1 = C_2 \Delta V_2$

e dovendo essere uguale l'energia immagazzinata nei due deve essere: $\frac{1}{2} C_1 \Delta V_1^2 = \frac{1}{2} C_2 \Delta V_2^2$.

Da queste due relazioni si ricava la condizione: $C_1 = C_2$. Ne segue: $\epsilon_r = \frac{\ln \frac{R_m}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_m}} = 1,79$

Per il teorema di Gauss $D = \frac{Q}{2\pi r l} = \frac{C_{\text{tot}} \cdot \Delta V}{2\pi r l}$, ma $C_{\text{tot}} = \frac{C_1}{2} = \frac{C_2}{2}$

e quindi: $\sigma = P = \epsilon_0 \chi E = \epsilon_0 \chi \frac{D}{\epsilon} = \frac{(\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \Delta V}{2 R_m \ln \frac{R_m}{R_1}} = 4,9 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2$