Compito scritto del Corso di Elettromagnetismo A.A. 2007/2008

8 Settembre 2008

(Proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese)

Esercizio 1

Un conduttore in lega di rame, inizialmente alla temperatura di 23 ^oC, ha la forma di una sfera cava con raggio interno $a = 1,0$ cm e raggio esterno $b = 5,0$ cm. Il conduttore è collegato a una pila di forza elettromotrice $f = 1,5$ V e resistenza interna trascurabile, in modo da essere percorso da una corrente radiale.

a) Determinare il valore della corrente;

b) Sapendo che il rame fonde alla temperatura $T = 1083$ ^oC e che per ogni 34 J di energia immagazzinata il conduttore si scalda di 1 ^oC, determinare dopo quanto tempo il conduttore fonderà nell'ipotesi di perfetto isolamento termico ;

c) In quali punti del conduttore la velocità di deriva degli elettroni di conduzione è massima? In quali punti è minima? Calcolare il rapporto tra i due valori.

N.B.: Si assuma la resistività della lega di rame costante e pari a $\rho = 1,7 \cdot 10^{-7}$ Ωm .

Esercizio 2

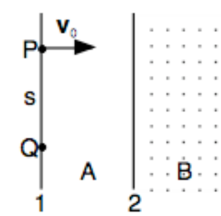
Due griglie metalliche estese, alle quali è applicata un d.d.p. costante $V_1 - V_2 = +5,0$ kV, delimitano le due regioni di spazio A e B della figura. Nella regione B vi è un campo magnetico uniforme **B** perpendicolare al piano del foglio. In un punto P della prima griglia viene immesso un protone ($m = 1.7 \cdot 10^{-27}$ kg, $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C) con velocità $v_o = 1.0 \cdot 10^6$ m/s diretta come mostrato. Il protone attraversa la regione A, entra nella B e ritorna nella regione A, arrivando alla fine nel punto Q a distanza $s = 5,0$ cm da P. Determinare:

a) il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche durante lo spostamento del protone dalla prima alla seconda griglia;

b) l'energia cinetica del protone in Q;

c) il modulo ed il verso di **B**;

d) la distanza tra i punti P e Q se la d.d.p. tra le griglie è invertita a parità delle altre condizioni.



Esercizio 3

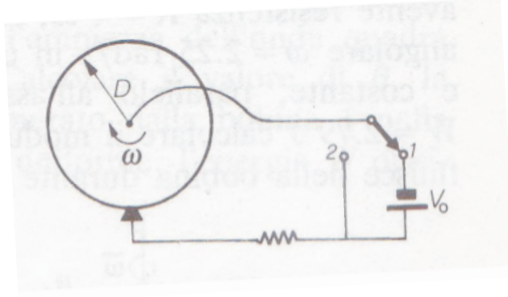
Un sottile disco conduttore di resistivit trascurabile, di diametro $D = 60$ cm e momento dinerzia $I = 3 \cdot 10^2$ kg m^2, immerso in un campo magnetico uniforme e costante, parallelo al suo asse, di modulo $B = 0.2$ T. Tramite un contatto strisciante è possibile far passare dall'asse ad un punto su bordo una corrente erogata da un generatore di forza elettromotrice V_o, avendo posto la levetta mostrata in figura in posizione 1. In seguito al passaggio di corrente il disco inizia a ruotare sino a raggiungere la velocità angolare di regime ω_o.
Al tempo $t = 0$ il generatore viene escluso dal circuito commutando la levetta nella posizione 2 e, nell'intervallo di tempo in cui la velocità angolare passa da ω_o a $\omega_o/3$ si dissipa nel circuito un'energia $W = 100$ J.
Determinare:

a) il valore di ω_o ;

b) la forza elettromotrice V_o;

c) l'equazione differenziale del moto del disco quando la levetta viene posta in posizione 2

PS. *Si indichi con R la resistenza del circuito elettrico e la si assuma nota.*



Soluzioni

Esercizio 1

a) Essendo il conduttore in lega di rame omogeneo ed isotropo, ed avendo applicato radialmente la differenza di potenziale, ci aspettiamo che sia il campo elettrico $\vec{E}$ sia la densità di corrente $\vec{J}$ dipenda dalla sola coordinata radiale r.
Inoltre il sistema è in condizioni stazionarie,

$$div\vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

. In queste condizioni il flusso di $\vec{J}$, attraverso una qualunque superfice sferica di centro il conduttore e raggio r, non dipende dalla superficie considerata. Affinchè ciò accada deve essere:

$$J(r) = \frac{\Gamma}{r^2}$$

e quindi per la legge di Ohm

$$E(r) = \rho J(r) = \rho \frac{\Gamma}{r^2}$$

Poichè

$$f = \int_a^b E \ dr = \rho\Gamma \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$$

deduciamo che

$$\Gamma = \frac{f}{\rho} \frac{ba}{b-a}$$

D'altra parte $f = Ri$, essendo

$$i = \int_{S(r)} J(r) r^2 d\Omega = 4\pi\Gamma = 4\pi \frac{f}{\rho} \frac{ba}{b-a} = 1.4 \cdot 10^6 \quad A$$

dove Ω è l'angolo solido.
b) In condizioni di perfetto isolamento termico, tutto il calore sviluppato per effetto Joule porta al punto di fusione il rame. Scrivendo l'equazione di bilancio termico, abbiamo:

$$C(T_f - T_i) = fi\Delta t$$

dove $T_i = 23\ ^o$C, $T_f = 1083\ ^o$C e Δt il tempo di attesa affinchè il rame inizi a fondere,

$$\Delta t = \frac{C(T_f - T_i)}{fi} = 17 \ \ ms$$

c) Infine, poichè nei metalli si ha

$$\vec{J} = n_e q_e \vec{v}_d$$

vista l'omegeneità del materiale (densità dei trasportatori di carica $n_e = costante$), otteniamo

$$v_d(r) = \frac{J(r)}{n_e q_e} = \frac{\Gamma}{n_e q_e} \frac{1}{r^2}$$

.
Se ne deduce che la velocità di deriva v_d è massima per $r = a$ e minima per $r = b$ ed il loro rapporto è

$$\frac{{v_d}^{max}}{{v_d}^{min}} = \frac{b^2}{a^2} = 25$$

Esercizio 2

Il protone di carica elettrica e compie un moto rettilineo uniformemente accelerato nella zona A con velocità inziale v_o, poi disegna nella zona B un semicerchio di raggio $R = s/2$ compiendo un moto circolare unforme con modulo della velocità costante e pari a v.

a) Il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche durante lo spostamento del protone dalla prima alla seconda griglia è:

$$L = e(V_1 - V_2) = 8.0 \cdot 10^{-16} \quad J$$

b) Poichè la forza di Lorentz non compie lavoro, allora il protone in Q ed in P avrà la stessa energia cinetica $K = \frac{1}{2}m{v_o}^2 = 8.5 \cdot 10^{-16} \quad J$.

c) Facendo riferimento al moto iniziale d'attraversamento nella zona A, per il teorema dell'energia cinetica, scriveremo che

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m{v_o}^2 + e(V_1 - V_2)$$

quindi

$$v = \left[{v_o}^2 + \frac{2e}{m}(V_1 - V_2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Nella zona B, essendo il vettore induzione magnetica $\vec{B}$ perpendicolare al piano, abbiamo

$$evB = m\frac{2v^2}{s}$$

e quindi

$$B = \frac{m}{e}\frac{2v}{s} = \frac{m}{e}\frac{2\left[{v_o}^2 + \frac{2q}{m}(V_1 - V_2)\right]^{\frac{1}{2}}}{s} = 0.58 \quad T$$

Facendo riferimento al disegno del testo, poichè il punto Q è in basso rispetto al punto P il campo $\vec{B}$, perpendicolare al piano, deve esser rivolto verso l'alto.

d) A parità di campo d'induzione magnetica, invertendo il segno di $\Delta V = (V_1 - V_2)$ avremo un valore del modulo della velocità del protone più bassa nella zona B

$$v^{'} = \left[{v_o}^2 - \frac{2e}{m}\Delta V\right]^{\frac{1}{2}}$$

ed un nuovo valore di s

$$s^{'} = \frac{m}{e}\frac{2v^{'}}{B} = 8.7 \quad mm$$

Esercizio 3

a) L'energia cinetica del disco viene dissipata così che possiamo scrivere:

$$W = \frac{1}{2} I {\omega_o}^2 - \frac{1}{2} I \left(\frac{\omega_o}{3}\right)^2$$

da cui deduciamo

$$\omega_o = \frac{3}{2}\left[\frac{W}{I}\right]^{\frac{1}{2}} = 0.87 \;\; rad/s$$

b)Il circuito equivalente del sistema con la levetta in posizione 2 è costituito da generatore di forza elettromotrice indotta f_i dovuta al moto di rotazione del disco conduttore in campo magnetico, dalla resistenza R e dal generatore di forza elettromotrice V_o. L'equazione del circuito elettrico è

$$f_i + V_o = Ri \tag{1}$$

Per esplicitare f_i scriviamo la sua dipendenza dal campo elettromotore di Lorentz:

$$f_i = -\int_0^{D/2} B\omega r dr = -\frac{B\omega D^2}{8} \tag{2}$$

dove ω è la velocità angolare istantanea del disco. Deduciamo quindi che

$$i = \frac{1}{R}\left[V_o - \frac{B\omega D^2}{8}\right]$$

D'altro canto l'equazione del moto del disco è

$$I\frac{d\omega}{dt} = M = \left|\int_0^{D/2} \vec{r} \times \vec{dF}\right| = \int_o^{D/2} iBrdr = \frac{1}{8}BD^2 i \tag{3}$$

Dalla formula (3) si deduce subito che in condizioni di regime, $\frac{d\omega}{dt} = 0$, la corrente elettrica deve essere nulla $i = 0$. Sostituendo la (2) nella (1) ed imponendo la condizione di regime $\omega = \omega_o$ e $i = 0$, otteniamo

$$V_o = -f_i = \frac{B\omega_o D^2}{8} = 7.8 \;\; mV \tag{4}$$

c) L'equazione differenziale del moto con la levetta in posizione 2 è immediatamente deducibile accoppiando le formule (3) e (1) avendo imposto $V_o = 0$.

$$I\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{8}BD^2 i = -\frac{1}{R}\frac{B^2\omega D^4}{64} \tag{5}$$