Soluzioni della prova scritta di Elettromagnetismo A.A. 2008/2009

10 Luglio 2009

(Proff. F. Lacava, D. Trevese, M. Virasoro)

Esercizio 1

1)

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\sum_{1\ i}^{4}\frac{q_i(\mathbf{r}-\mathbf{r_i})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r_i}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{(\mathbf{r}-a\ \hat{\mathbf{j}})}{[x^2+(y-a)^2+z^2]^{3/2}} + \frac{(\mathbf{r}+a\ \hat{\mathbf{j}})}{[x^2+(y+a)^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{r}-a\ \hat{\mathbf{i}})}{[(x-a)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{r}+a\ \hat{\mathbf{i}})}{[(x+a)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\}$$

2)
Per $x = y = 0$ risulta:

$$\mathbf{E}(0,0,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{(z\hat{\mathbf{k}}-a\ \hat{\mathbf{j}})}{[a^2+z^2]^{3/2}} + \frac{(z\hat{\mathbf{k}}+a\ \hat{\mathbf{j}})}{[a^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{2}\frac{(z\hat{\mathbf{k}}-a\ \hat{\mathbf{i}})}{[a^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{2}\frac{(z\hat{\mathbf{k}}+a\ \hat{\mathbf{i}})}{[a^2+z^2]^{3/2}}\}, \quad \text{da cui risulta: } E_x(0,0,z) = E_y(0,0,z) = 0$$

come ci si doveva aspettare per evidenti motivi di simmetria. Per la componente z si ha:

$E_z(0,0,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}}$ il cui andamento è del tipo (..fig)

$$E_z(0,0,d) = 8.99\cdot 10^9\frac{m^2}{F}3\cdot 10^{-9}C\cdot 320m^{-2} = 8.63\ \frac{kV}{m}$$

3)
I punti estremali verificano l'equazione: $\frac{\partial E_z(0,0,z)}{\partial z} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}z(a^2+z^2)^{-3/2} = (a^2+z^2)^{-3/2} + z(-\frac{3}{2})(a^2+z^2)^{-5/2}2z = 0 \Rightarrow z = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

4)
Il terminie di monopolo corrisponde as una carica q nell'origine ed il termine di dipolo e' nullo. Quindi, nell'approssimazione richiesta, il campo e' quello coulombiano della carica q nell'origine delle coordinate.
Il dipolo $\mathbf{p}$ risulta ortogonale al campo. Il momento M è diretto lungo l'asse z : $\mathbf{M} = -M\hat{\mathbf{k}}$, con $M = pE(10\cdot d,0,0) = p\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{(10\cdot d)^2} = 7\cdot 10^{-12}C\cdot m\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{3\cdot 10^{-9}C}{(50\cdot 10^{-2}m)^2} = 7.56\cdot 10^{-10}N\cdot m$

Esercizio 2

1)
Sia x la distanza tra A e B. Le capacità dei due condensatori sono date da:
$C_1(x) = \frac{\epsilon_0 \Sigma_1}{x} = \frac{\epsilon_0 l_1^2}{x}$
$C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \Sigma_2}{d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r l_2^2}{d}$
Per cui: $C_1(d) = 2.21$ nF, $C_2 = 1.77$ pF.
La carica totale si conserva, di conseguenza la d.d.p tra le armature sarà:
$V(x) = \frac{Q}{C_1(x)+C_2} = \frac{(C_1(d)+C_2)V_0}{C_1(x)+C_2}$.
I fenomeni di scarica si avaranno quando il campo elettrico all'interno di ciascun condensatore supererà il valore della rigidità dielettrica del condensatore:
$E_2 = \frac{V(x)}{d} \geq E_d^{carta}$,
$E_1 = \frac{V(x)}{x} \geq E_d^{aria}$.
A causa della dipendenza da x anche a denominatore di E_1 e poichè $x \geq d$ la scarica inizierà a manifestarsi nel condensatore C_2, quando la distanza $x \geq d_{max}$ tale che:
$E_2 = \frac{V(x)}{d} = \frac{C_1(d)+C_2}{C_1(d_{max})+C_2} \frac{V_0}{d} \geq E_d$,
per cui: $C_1(d_{max}) \leq \frac{V_0}{dE_d}(C_1(d)+C_2) - C_2$,
e quindi: $d_{max} = \frac{\epsilon_0 \Sigma_1}{C_1(d_{max})} \geq \frac{\epsilon_0 \Sigma_1}{\frac{V_0}{dE_d}(C_1(d)+C_2)-C_2} = 2\text{cm}$.

2)

L'energia elettrostatica del sistema è:
$U_E(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1(x)+C_2)}$,
per cui ($C_1(d_{max} = 0.11$ nF):
$U_E(d_{max}) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1(d_{max})+C_2)} = \frac{1}{2}\frac{(C_1(d)+C_2)^2 V_0^2}{C_1(d_{max})+C_2)} = 2$ mJ.

3)

Applicando il principio dei lavori virtuali:

$$F_E = -\frac{dU_E(x)}{dx} = -\frac{dU_E(x)}{dC_1(x)}\frac{dC_1(x)}{dx} = \frac{1}{2}\frac{(C_1(d)+C_2)^2}{(c_1(x)+C_2)^2}V_0^2(-\frac{\epsilon_0\epsilon_r\Sigma_1}{x^2}) = -\frac{1}{2}\frac{C_1(x)}{x}\frac{(C_1(d)+C_2)^2}{(C_1(x)+C_2)^2}V_0^2,$$

attrattiva. Per $x = d_{max}$ avremo:

$$F_E = -\frac{1}{2}\frac{C_1(d_{max})}{d_{max}}\frac{(C_1(d)+C_2)^2}{(C_1(d_{max})+C_2)^2}V_0^2 = -0.1 \text{ N}.$$

Esercizio 3

1)
In pratica il circuito del problema è in ogni istante costituito da due elettrodi circolari (rotaie) collegati da una parte dalla resistenza R_0 e dall'altra dal carrello, schematizzato come una sbarretta conduttrice. Il campo elettromotore indotto è dato dalla formula della forza di Lorentz (per unità di carica):
$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$:
$fem = \int \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{l} = \int (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) \cdot d\overrightarrow{l} = \int_{r_1}^{r_2} \omega r B dr = \frac{1}{2}\omega B(r_2^2 - r_1^2)$.
Per cui: $I = \frac{fem}{R_0} = \frac{1}{2R_0}\omega B(r_2^2 - r_1^2)$.
2)
Sulla corrente che attraversa il carrello agisce una forza data dalla legge di Laplace, che in modulo vale:
$F_L = I(r_2 - r_1)B = \frac{1}{2R_0}\omega B^2(r_2^2 - r_1^2)(r_2 - r_1) = k\omega$,
che si oppone alla forza motrice F.
L'equazione del moto del carrello sarà:
$Ma = F - F_L = F - k\omega$.
In condizioni stazionarie $a = 0$, avremo: $\omega(\infty) = F/k$, e quindi:
$fem(\infty) = \frac{1}{2}\omega(\infty)B(r_2^2 - r_1^2) = \frac{F}{2}\frac{B(r_2^2-r_1^2)}{k} = \frac{FR_0}{B(r_2-r_1)} = 6.7$ V.

Soluzione Esercizio 4

1) Dal teorema della circuitazione di Ampère per il toroide completo:

$H \cdot 2\pi r = N_1 I$ quindi $H = \frac{N_1 I}{2\pi r}$.

Dopo la rimozione del settore di toroide:

$H\,(2\pi - \alpha)\,r + H_0\ \alpha\, r = N_1 I$ $\frac{B}{\mu}\,(2\pi - \alpha)\,r + \frac{B}{\mu_0}\ \alpha\, r = N_1 I$

$\frac{B}{\mu}\,(2\pi - \alpha)\,r + \frac{B}{\mu_0}\ \alpha\, r = N_1 I$ $H\ (2\pi - \alpha + \mu_r\,\alpha)\,r = N_1 I$

$$H = \frac{N_1 I}{(2\pi - \alpha + \mu_r\,\alpha)\,r}$$

2) Nel toroide prima della rimozione abbiamo per la densità di energia magnetica: $u_m = \frac{B^2}{\mu}$

Dopo la rimozione: nel materiale ferromagnetico $u'_m = \frac{B^2}{\mu}$

nel vuoto $u'_m = \frac{B^2}{\mu_0}$

Quindi: $U_m = \int_0^{2\pi}\int_r^{r+a} u_m\, a\, r\, d\varphi\, dr = \frac{1}{2}\ a\ \frac{\mu}{2\pi}(N_1 I)^2\, ln\left(\frac{r+a}{r}\right)$

Dopo la rimozione: $U'_m = \int_0^{2\pi-\alpha}\int_r^{r+a} \frac{B^2}{\mu} a\, r\, d\varphi\, dr + \int_0^{\alpha}\int_r^{r+a} \frac{B^2}{\mu_0}\ a\, r\, d\varphi\, dr$

$U'_m = \frac{(\mu\, N_1 I)^2}{(2\pi - \alpha) + \mu_r\,\alpha}\frac{1}{2\mu}\ ln\left(\frac{r+a}{r}\right)$

Ed infine: $\frac{U_m}{U'_m} = \frac{(2\pi - \alpha) + \mu_r\,\alpha}{2\pi} = 2{,}38$.

3) La quantità di carica fluita nel circuito col galvanometro balistico per la legge di Felici è:

$Q = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{N_1 N_2\ a\, I}{R}\ ln\left(\frac{r+a}{r}\right) \cdot \left\{\frac{1}{(2\pi - \alpha) + \mu_r\,\alpha} - \frac{1}{2\pi}\right\} = -5{,}52 \cdot 10^{-6}$ C.

Avendo in precedenza calcolato la variazione di flusso di B:

$\Delta\Phi = \frac{a N_1 N_2 I\,\mu}{R}\ ln\left(\frac{r+a}{r}\right) \left\{\frac{1}{(2\pi - \alpha) + \mu_r\,\alpha} - \frac{1}{2\pi}\right\}$ dall'integrale del campo sulla sezione del toroide.