Soluzione esercizio n. 1

Soluzione di a):

Se la superficie B, posta tra superfici sferiche cariche, si trova a potenziale nullo (= $V_0(\infty)$), su di essa deve essere presente una carica Q_B.

Sulla superficie interna dello strato C ci aspettiamo una carica indotta Q_X, e la carica totale sulla superficie esterna di C sarà quindi Q_C-Q_X.

Per il principio di sovrapposizione possiamo dire che il potenziale nullo su B è determinato dalla somma dei potenziali delle cariche Q_A su A, Q_B su B, Q_X e $Q_C - Q_X$ su C quindi:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_A}{R_2}+\frac{Q_B}{R_2}+\frac{Q_X}{R_3}+\frac{Q_C-Q_X}{R_4}\right)=0 \quad .$$

Abbiamo due incognite Q_B e Q_X . Poiché all'interno del conduttore C il campo elettrico dev'essere nullo, il flusso su una superficie sferica passante al suo interno dev'essere nullo e quindi la carica totale racchiusa al suo interno dev'essere nulla. Ne segue che possiamo scrivere: $Q_A + Q_B + Q_X = 0$ e quindi $Q_X = -(Q_A+Q_B)$.

Inserendo questa relazione nell'espressione del potenziale si ricava:

$$Q_B = -Q_A - Q_C\frac{\frac{1}{R_4}}{\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}} = -0{,}728\ \text{C} \quad .$$

Altra soluzione di a):

Il sistema di conduttori può essere interpretato come un insieme di tre condensatori sferici. Un condensatore tra la superficie A e B, un condensatore tra B e la superficie di raggio R_3 ed un condensatore tra la superficie di raggio R_4 e infinito. Dovendoci essere induzione elettrostatica completa tra le armature dei condensatori, su B ci deve essere una carica $-Q_A$ indotta da Q_A più una carica $-Q_X$ indotta da Q_X sull'armatura di raggio R_3. Inoltre la d.d.p. del condensatore sferico tra B e R_3 deve essere la stessa del condensatore tra R_4 e infinito. Possiamo quindi scrivere:

$Q_B = -Q_A - Q_X$ e poi dall'eguaglianza del potenziale del secondo e terzo condensatore: $\dfrac{Q_X}{C_{23}} = \dfrac{Q_C - Q_X}{C_{4\infty}}$

con $C_{23} = 4\pi\varepsilon_0\dfrac{R_3-R_2}{R_3R_2}$ = 4,45 nF e $C_{4\infty} = 4\pi\varepsilon_0 R_4$ = 1,39 nF.

Da queste relazioni si trova Q_X e quindi Q_B.

La capacità del condensatore tra A e B è: $C_{12} = 4\pi\varepsilon_0\dfrac{R_2-R_1}{R_2R_1}$ = 1,48 nF .

Soluzioni di b):

L'energia elettrostatica si può calcolare come la somma dell'energia nei tre condensatori:

$$W = \frac{1}{2}\left(\frac{Q_A^2}{C_{12}}+\frac{(Q_X)^2}{C_{23}}+\frac{(Q_C-Q_X)^2}{C_{4\infty}}\right) = 9{,}19\cdot 10^7\ \text{J}$$

Oppure – con stesso risultato algebrico – integrando l'energia del campo elettrico su tutto lo spazio:

$$W = \int \frac{1}{2}E_0^2\varepsilon_0\, d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^4}4\pi r^2\,dr + \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q_X}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\int_{r_2}^{r_3}\frac{1}{r^4}4\pi r^2\,dr + \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q_C-Q_X}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\int_{r_4}^{\infty}\frac{1}{r^4}4\pi r^2 dr$$

Soluzione esercizio n. 2

Dalla prima formula di Laplace (si veda p.es. libro di testo) è facile ricavare il campo $B_0(z)$ generato dalle due spire lungo l'asse z :

$$B_0(z) = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{(3R^2)}{((3R)^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0 I'}{2}\frac{R^2}{(R^2+(d-z)^2)^{3/2}}$$

Richiedendo: $B_0(R) = 0$ si ottiene: $I' = -0{,}4$ A .

Successivamente da: $H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}$, usando l'espressione data, si ottiene:

$H_0(0) = 6{,}63$ Asp/m e $H_0(d) = -4{,}04$ Asp/m .