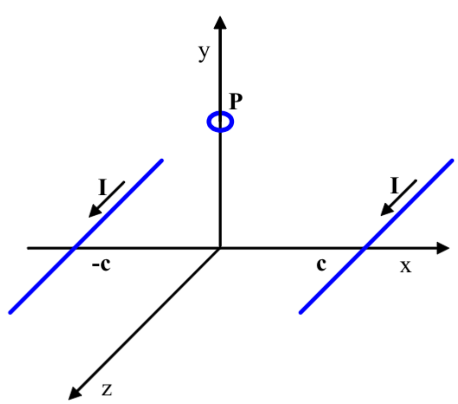
Prova scritta d'esame di Elettromagnetismo
(Proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese)
7 Settembre 2010
Elettromagnetismo 10 o 12 crediti: esercizi 1, 2, 4 tempo 3 h e 30 min;
Elettromagnetismo 5 crediti: esercizi 3, 4 tempo 2 h e 20 min;
Elettricità e Magnetismo 5 crediti: esercizi 1, 2, tempo 2 h, 20 min;

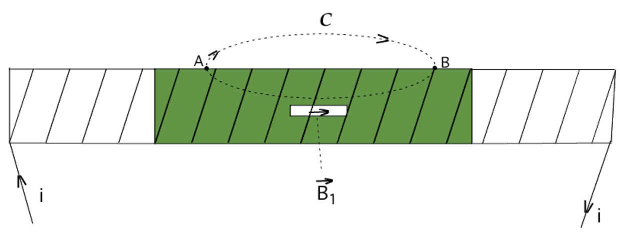
Esercizio 1
Un condensatore piano con armature quadrate di lato $L = 20.0$ cm distanti tra loro $h = 5.00$ mm è collegato ad un generatore di f.e.m. $V_0 = 300$ V. Due lastre quadrate di lato L unite tra loro, una conduttrice ed una di materiale dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 1.50$ e ciascuna di spessore $h/4$, vengono introdotte tra le armature con i lati paralleli ad esse, fino a metà della superficie. Calcolare, trascurando gli effetti di bordo:
a) la capacità totale del sistema in questa configurazione;
b) il lavoro compiuto dal generatore durante l'introduzione del gruppo delle due lastre fino alla posizione descritta nel testo;
c) la densità di carica di polarizzazione presente sulle superfici del dielettrico comprese tra le armature;
d) la densità di carica presente sulle due facce della lastra conduttrice nella porzione inserita tra le armature, quando si è raggiunta la configurazione riportata in figura.

Esercizio 2
Due fili rettilinei indefiniti, paralleli all'asse z, intercettano l'asse x nei punti di coordinate $(\pm c, 0, 0)$, essendo $c = 0.1$ m. I fili sono percorsi dalla stessa corrente $I = 100$ A, con verso concorde con l'asse z. Nel punto $P = (0, a, 0)$, essendo $a = 20$ cm, viene posta una piccola spira circolare, di raggio $r = 1$ mm, percorsa dalla corrente $I_s = 2.0$ A.

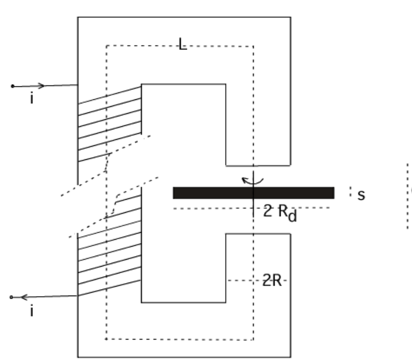
Il piano della spira è parallelo al piano xz e la corrente I_s, osservando la spira dall'alto, circola in senso antiorario. Si chiede di calcolare:
a) le componenti del campo magnetico generato dai due fili nel punto P;
b) il momento della forza necessario a tenere immobile la spira;
c) il lavoro compiuto dalle forze esterne nel ribaltare la spira.



Esercizio 3
Un cilindro di materiale ferromagnetico è inserito in un solenoide della stessa sezione. Il solenoide è percorso dalla corrente i ed ha una densità di spire pari ad $n = 10$ spire/cm. Il cilindro è magnetizzato uniformemente ed il campo di induzione magnetica, misurato in una cavità nel ferromagnete sottile ed allungata con l'asse parallelo all'asse del cilindro, è $B_1 = 2.51 \cdot 10^{-3}$ T . La circuitazione di $\vec{B}$, calcolata lungo la linea C mostrata in figura, è pari a $3.00 \cdot 10^{-3}$ Tm, essendo la distanza tra i punti A e B pari a $d = 20.0$ cm.
Trascurando il flusso disperso, in questa condizione di lavoro, calcolare:
1) la corrente i che circola nell'avvolgimento,
2) la magnetizzazione M del materiale,
3) la suscettività χ del materiale.



Esercizio 4
Un elettromagnete è costituito da un una struttura di materiale ferromagnetico di lunghezza $L = 2$ m, molto maggiore del raggio $R = 7.0$ cm della sua sezione circolare, e da un traferro di spessore $d = 1$ cm ortogonale alle linee di forza del campo. La forza magnetomotrice è prodotta da $N = 100$ spire avvolte sul circuito magnetico. Si assuma costante e pari a $\mu_r = 500$ la permeabilità magnetica relativa del ferromagnete. Nelle spire circola una corrente alternata sinusoidale di valore massimo $I_M = 10$ A e frequenza $\nu = 50$ Hz. Nel traferro è posto un disco di rame di spessore $s = 3.0$ mm e raggio$R_d = 10$ cm, coassiale con il traferro. La resistività elettrica del rame è $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\ m$ e la sua permeabilità magnetica relativa è assunta pari a 1.
Trascurando tutti gli effetti di bordo, si calcoli:
a) l'andamento campo magnetico nel traferro in funzione del tempo, specificando il suo valore massimo;
b) l'andamento del campo elettrico indotto nel rame, in funzione del tempo e della variabile radiale r negli intervalli $0 \leq r \leq R$ e $R \leq r \leq R_d$, sfruttando adeguatamente la simmetria assiale del problema;
c) gli andamenti, in funzione del tempo e del raggio r, della densità di corrente J e della potenza per unità di volume dissipata nel rame;
d) il valor medio della potenza totale dissipata per effetto Joule in un periodo $T = 2\pi/\omega$ nell'intero disco di rame.



Soluzioni della prova scritta

(Proff. F. Lacava, F.Ricci, D. Trevese)

Esercizio 1

a)
In assenza del sistema di lastre inserite, il condensatore piano ha una capacità pari a

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{L^2}{h} = 70.8\ pF$$

Una volta inserite sino ad una lunghezza pari ad $L/2$, il sistema è equivalente a 3 condensatori Un condensatore a vuoto

$$C_1 = \frac{1}{2} C_0$$

Un condensatore con il dielettrico inserito, una superficie pari a $L^2/2$ e una distanza tra le armature pari a $h/4$

$$C_2 = \epsilon_r (2\ C_0)$$

Un altro condensatore a vuoto con una superficie pari a $L^2/2$ e una distanza tra le armature pari a $h/2$

$$C_3 = C_0$$

I condensatori C_2 e C_3 sono posti in serie tra loro e questa serie è a sua volta in parallelo a C_1. Concludiamo quindi che la capacità totale del sistema è:

$$C_{tot} = C_1 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)^{-1} = C_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{2\epsilon_r}{1 + 2\epsilon_r} \right) = 88.5\ pF$$

b) Il lavoro compiuto dal generatore è

$$L = \int_{Q_{in}}^{Q_{fin}} V_0 dQ = {V_0}^2 \int_{C_0}^{C_{tot}} dC = {V_0}^2 [C_{tot} - C_0] = {V_0}^2 \epsilon_0 \frac{L^2}{h} \left[\frac{2\epsilon_r}{1 + 2\epsilon_r} - \frac{1}{2} \right] = 1.56 \cdot 10^{-6}\ J$$

essendo il processo a potenziale costante, ovvero $Q = C\ V_0$.

c) Nell'ipotesi di mezzo omogeneo ed isotropo, per calcolare le cariche di polarizzazione è necessario calcolare il campo $\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}$. Infatti, si ha che

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} = \epsilon_0 (1 - \epsilon_r) \frac{\Delta V}{d}$$

essendo il condensatore a geometria piana ed avendo indicato con ΔV la differenza di potenziale ai capi del condensatore con dielettrico e $d = h/4$ la sua distanza tra le sue armature. Detta $V_i,\ (i = 1, 2, 3)$ la differenza di potenziale ΔV del condensatore $C_i,\ (i = 1, 2, 3)$, osserviamo che essendo la serie dei due condensatori C_2 e C_3 in parallelo a C_1, si ha:

$$C_2 V_2 = C_3 V_3 \text{ ovvero } V_3 = \tfrac{C_2}{C_3} V_2$$

$$V_0 = V_1 = V_2 + V_3 = V_2 \left(1 + \frac{C_2}{C_3} \right)$$

Da cui deduciamo

$$V_2 = V_0 \left(\frac{C_3}{C_2 + C_3} \right) = V_0 \left(\frac{1}{1 + 2\epsilon_r} \right) = 75\ V$$

$$V_3 = V_0 \left(\frac{C_2}{C_2 + C_3} \right) = V_0 \left(\frac{2\epsilon_r}{1 + 2\epsilon_r} \right) = 225\ V$$

$$|\sigma_p| = |\epsilon_0 (1 - \epsilon_r) \frac{V_2}{h/4}| = 2.66 \cdot 10^{-7}\ C/m^2 \tag{1}$$

d) La densità di carica σ_c presente sulle due facce della lastra conduttrice nella porzione inserita tra le armature è deducibile applicando il teorema di Coulomb da cui si ha che $\sigma_c = |\vec{D}|$. Riferendosi al condensatore C_2 con il dielettrico si ha

$$\sigma_c = |\vec{D}_2| = |\epsilon_0 \vec{E}_2 + \vec{P}| = \epsilon_0 \frac{V_2}{h/4} + |\sigma_p| = 7.97 \cdot 10^{-7} \ C/m^2$$

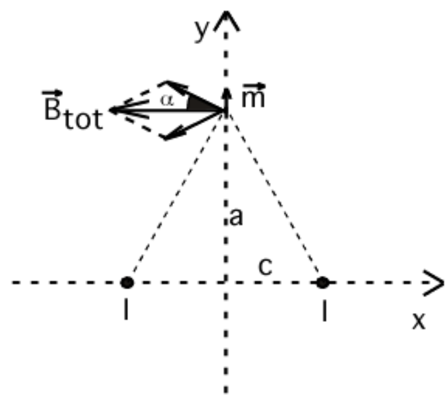
Un modo alternativo di procedere è di dedurre prima σ_c calcolando la carica della capacità C_s, serie di C_2 e C_3, e dividendola per la superficie delle armature $L^2/2$:

$$\sigma_c = \frac{Q_s}{L^2/2} = \frac{C_s V_0}{L^2/2} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \frac{2}{L^2} V_0$$

Si deduce quindi σ_p dall'analoga della (1).

Esercizio 2

a) Viste le ridotte dimensioni lineari della spira rispetto alle distanze in giuoco, la spira è assimilabile ad un ago magnetico di momento di dipolo $\vec{m}$, diretto come l'asse y e di modulo pari a $m = \pi r^2 I_s = 6.28 \cdot 10^{-6}\ Am^2$ In figura è mostrato il sistema proiettato sul piano xy , dove la spira è rappresentata dal momento magnetico $\vec{m}$.



Applicando la legge di Biot-Savart ed osservando la figura, deduciamo che il campo $\vec{B}_{tot}$ ha la sola componente x diversa da zero, é diretto in verso opposto all'asse x ed è pari al doppio della componente x del campo d'induzione dovuto ad un solo filo:

$$B_x = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{I}{\sqrt{c^2 + a^2}} \cos\alpha$$

dove $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{c^2+a^2}}$, ovvero

$$\left(B_{tot}\right)_x = -\frac{\mu_o}{\pi} I \frac{a}{c^2 + a^2} = -1.6 \cdot 10^{-4} T, \quad \left(B_{tot}\right)_y = 0, \quad \left(B_{tot}\right)_z = 0$$

Quindi il campo magnetico $\vec{H}$ è:

$$H_x = 1.27 \cdot 10^2 \quad Aspire/m, \quad H_y = 0, \quad H_z = 0$$

b) Il momento delle forze necessario per mantenere in equilibrio la spira è uguale ed opposto al momento della forza magnetica che tende a farla ruotare

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}_{tot}$$

Tale vettore è diretto come l'asse z. Poiché i vettori $\vec{m}$ e $\vec{B}_{tot}$ sono perpendicolari tra loro, il modulo del momento della forza è pari a

$$M = mB_{tot} = 1.0 \cdot 10^{-9} \quad Nm$$

c) Detto θ l'angolo di rotazione della spira che riferiamo alla direzione del campo di induzione $\vec{B}_{tot}$, il lavoro meccanico necessario per rovesciare la spira è pari

$$L = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} M d\theta = mB_{tot} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = 0$$

Esercizio 3

a) Le linee di forza del campo magnetico $\vec{H}$ nel ferro sono parallele all'asse del cilindro per cui il modulo del campo magnetico è immediatamente deducibile dalla misura di $\vec{B}$

$$H = \frac{B}{\mu_o}$$

Nell'ipotesi di trascurare il flusso disperso possiamo dedurre H considerando la sua circuitazione calcolata lungo un rettangolo avente lati paralleli all'asse del cilindro , uno interno e l'altro esterno al ferro. Si ottiene per H la ben nota relazione del caso del solenoide infinito:

$$H = \frac{N}{d} i$$

da cui ricaviamo

$$i = \frac{B}{\mu_o} \frac{d}{N} = 2 \ A$$

b) La circuitazione del campo di induzione magnetica $\Gamma(B)$ calcolata lungo la linea C è

$$\Gamma(B) = \mu_o (M + H) d = (M + i \frac{N}{d}) \mu_o d$$

da cui deduciamo M

$$M = (\frac{\Gamma(B)}{\mu_o d} - i \frac{N}{d}) = 9.94 \cdot 10^3 \ A/m$$

c) Per ricavare la suscettività magnetica è sufficiente ricordarne la definizione

$$\chi = \frac{M}{H} = 4.97$$

Esercizio 4

a) Indichiamo con $I = I_M sin\omega t$ la corrente sinusoidale di pulsazione$\omega = 2\pi\nu$. Applicando il teorema della circuitazione di Ampère al cammino chiuso di lunghezza $L + d$ mostrato nella figura del testo, si ha

$$NI(t) = H_f L + H_t d = \frac{B(t)}{\mu_o}(\frac{L}{\mu_r} + d)$$

dove con H_f e H_t abbiamo indicato i moduli dei campi magnetici nel ferro e nel traferro. Inoltre abbiamo fatto uso della legge di continuità della componente normale del campo d'induzione $B = B_o sin\omega t$ alla superficie di separazione dei due mezzi. Da questa formula deduciamo il valore d'ampiezza di $B(t)$

$$B_o = \mu_o N I_M \frac{\mu_r}{\mu_r d + L} = 8.98 \cdot 10^{-2}\ T$$

ovvero

$$H_o = 7.07 \cdot 10^4 \quad Aspire/m$$

b) Sfruttiamo la simmetria cilindrica del problema nell'applicare l'equazione di Maxwell $rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Calcoliamo il flusso del $rot\vec{E}$ attraverso un cerchio di raggio generico r centrato sul centro del disco di rame:

$$\int_{S(r)} rot\vec{E} \cdot \vec{n} dS = \oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{dB}{dt}\pi r^2$$

dove abbiamo già utilizzato il fatto che $\vec{B}$ è uniforme e dipendente solo dal tempo. Vista la simmetria del problema le linee di forza del campo $\vec{E}$ saranno cerchi concentrici di raggio r, quindi avremo :

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = 2\pi r E = -\omega B_o cos\omega t \pi r^2$$

da cui deduciamo

$$E(t, r) = -\frac{1}{2}\omega r B_o \cos\omega t, \qquad r \leq R$$

Per $r > R$, con analogo ragionamento dall'equazione $2\pi r E = -\omega B_o \cos\omega t \pi R^2$, si ottiene:
da cui

$$E(t, r) = -\frac{1}{2}\omega \frac{R^2}{r} B_o \cos\omega t, \qquad R \leq r \leq R_d$$

c) Le linee di forza della densità di corrente $\vec{J}$ nel disco hanno la stessa struttura di quelle del campo elettrico. Infatti per la legge di Ohm si ha:

$$\vec{J} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$$

e la potenza istantanea dissipata nell'unità di volume W può essere scritta direttamente utilizzando la formula $W = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{E^2}{\rho}$.

d) Integrando sul volume del disco otteniamo la potenza istantanea dissipata in tutto il disco

$$P(t) = \left(\frac{\omega B_o}{2}\cos\omega t\right)^2 \frac{1}{\rho} 2\pi s \left[\int_0^R r^3 dr + \int_R^{R_d} \frac{{R_d}^4}{r} dr\right]$$

$$P(t) = \left(\frac{\omega B_o}{2}\cos\omega t\right)^2 \frac{1}{\rho} 2\pi s \left[\frac{R^4}{4} + {R_d}^4 \ln\left(\frac{R_d}{R}\right)\right]$$

Calcolando poi il valore medio su un periodo, concludiamo che la potenza media dissipata è :

$$P_m = \frac{\pi s}{4\rho}\omega^2 {B_o}^2 \left[\frac{R^4}{4} + {R_d}^4 \ln\left(\frac{R_d}{R}\right)\right] = 4.6\ \ kW$$