Compito di Elettricità e Magnetismo e di Elettromagnetismo – Prova scritta del 15-2-2011.

(Proff. S.Giagu, F.Lacava, F.Ricci)

Elettromagnetismo (10 e 12 crediti): esercizi 1, 3, 4; tempo 3 ore

Elettromagnetismo (5 crediti): esercizi 3 e 4, tempo 2 ore

Elettricità e magnetismo (5 crediti): esercizi 1 e 2, tempo 2 ore

Esercizio 1:

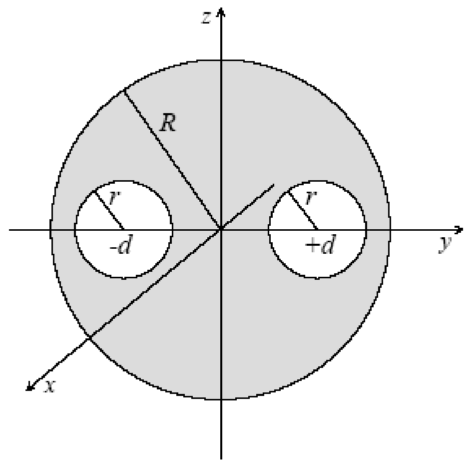
Una sfera di raggio R è carica uniformemente con densità di carica ρ. All'interno della sfera sono presenti due cavità sferiche di raggio r, con centri posti sull'asse y (vedi figura) nelle posizioni y=±d. Dati: R = 6.0 cm, r=1.0 cm, d=3 cm .

Determinare:

a) il valore della densità di carica ρ, sapendo che il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa che racchiude la sfera vale: $\phi = 56.2 \times 10^{-2}$ V·m ;

b) l'espressione del campo elettrico E sull'asse z per 0<z<R e per z>R ;

c) il potenziale rispetto all'infinito nel punto P (0,0,R).

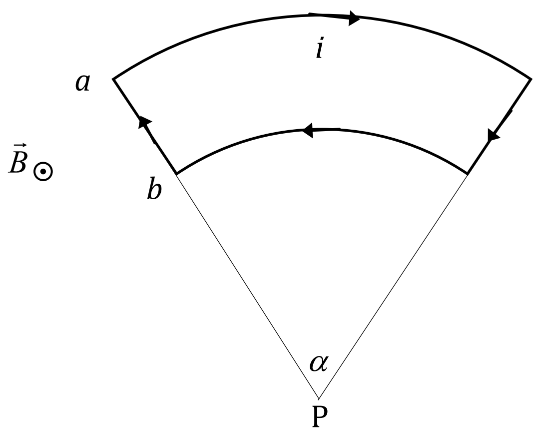


Esercizio 2:

Una spira indeformabile percorsa in verso orario da una corrente i=15 A e' sagomata come mostrato in figura. I tratti curvi sono archi di circonferenza di raggi a=12 cm e b=8.0 cm ed ampiezza angolare α=60°.

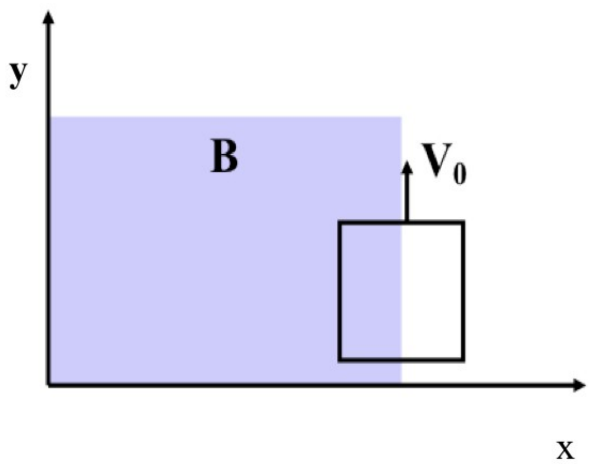
a) Determinare direzione, verso e modulo del campo di induzione magnetica nel punto P coincidente con il centro degli archi di circonferenza.

b) Se la spira e' immersa in un campo di induzione magnetica B=0.35 T diretto ortogonalmente al piano del foglio, con verso uscente da quest'ultimo, determinare direzione, verso e modulo della forza agente su ciascun ramo della spira e verificare che la forza totale e' nulla.



Esercizio 3:

Un circuito rigido quadrato, di lato L=100 cm, è costituito di un filo di alluminio (resistività ρ=2.56 10^{-8} Ωm) di sezione S=10 mm^2. Esso si trova nel piano xy con i lati paralleli ai due assi, ed è immerso in un campo di induzione magnetica uniforme di modulo B_z= 0,5 T diretto perpendicolarmente al piano del foglio ed uscente da esso, limitato all'area colorata della figura. Il circuito, inizialmente immerso per metà nel campo magnetico (vedi figura), trasla parallelamente all'asse y con velocità che viene mantenuta costante di modulo v_0= 20 cm/s.
Trascurando l'effetto di autoinduzione della spira, calcolare giustificando:
a) il verso della corrente indotta (orario o antiorario), con riferimento alla figura;
b) l'intensità di tale corrente nel circuito durante il moto;
c) l'energia totale dissipata nel circuito per effetto Joule;
d) il lavoro effettuato per portare il circuito completamente fuori del campo.



Esercizio 4:

Le armature di un condensatore a facce piane e parallele, di superficie S = 80 cm^2, vengono allontanate fra loro con velocità costante v= 3 mm/s dalla distanza iniziale d_0 = 1 mm. Durante il movimento vengono mantenute connesse a un generatore di forza elettromotrice costante pari a 100 V.
a) Determinare la densità di corrente di spostamento fra le armature del condensatore in funzione del tempo trascurando possibili effetti di bordo e assumendo trascurabile la resistenza ohmica del circuito.
b) Calcolare il valore numerico della corrente di spostamento all'istante t_0 = 2 s, e indicare la direzione del vettore densità di corrente di spostamento rispetto al vettore campo elettrico.
c) Nell'ipotesi in cui la resistenza R del circuito non possa essere trascurata, scrivere l'equazione esplicita del circuito, per la carica Q(t) presente sulle armature del condensatore.

Soluzioni.

Esercizio 1:

a) dal teorema di Gauss: $\phi = Q_{int}/\varepsilon_0 = Q/\varepsilon_0$ con Q carica della sfera cava. Da cui: $Q=\varepsilon_0\,\phi$

Nota la carica Q avremo: $\rho = Q/\text{Volume} = Q / (4/3\pi R^3 - 2\cdot 4/3\pi r^3) = 3Q/4\pi(R^3 - 2r^3) = 3\,\varepsilon_0\,\phi/4\pi(R^3 - 2r^3) = 5.56\ 10^{-9}\ \text{C/m}^3$

b) per il principio di sovrapposizione il campo **E** può essere pensato come somma dei campi generati da una sfera carica con densità ρ di raggio R centrata nell'origine e due sfere cariche con densità −ρ di raggio *r* centrate rispettivamente in ±*d* . Sull'asse z, per ragioni di simmetria, il campo è diretto lungo l'asse z stesso con valore:

z>R: $$E(z) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{R^3}{z^2} - \frac{2zr^3}{\left(d^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Z<R: $$E(z) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[z - \frac{2zr^3}{\left(d^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

essendo in entrambe le espressioni il primo termine quello relativo al campo elettrostatico generato dalla sfera carica positivamente e il secondo il campo generato dalle due sfere cariche con densità −ρ.

c) Il potenziale nel punto z=R si ottiene per integrazione del campo, o per sovrapposizione dei potenziali della sfera con carica ρ e delle due sfere con densità −ρ:

$$V(P) = \int_R^\infty dz E(z) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[R^2 - \frac{2r^3}{\left(d^2+R^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right] = 0.75\ \text{V}$$

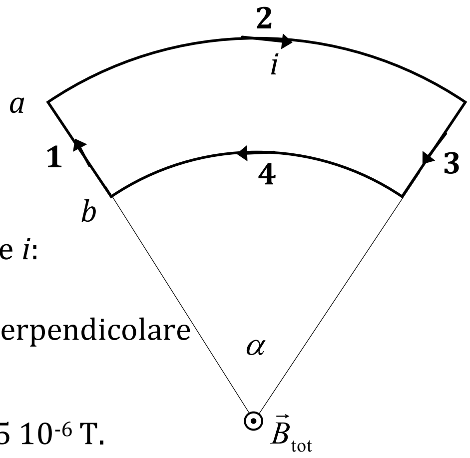
Esercizio 2:

a) Considerando separatamente i tratti rettilinei della spira, il campo magnetico generato da ciascuno di essi in P e' pari a:

$\vec{B}_1(\mathrm{P}) = \vec{B}_3(\mathrm{P}) = 0$, in quanto $\mathrm{d}\vec{l} \,//\, \Delta\vec{r}$.

I contributi degli archi di circonferenza in P possono essere calcolati a partire dal risultato noto per il campo magnetico generato nel centro di una spira circolare percorsa da corrente *i*:

$\vec{B}_2 = \dfrac{\mu_0 i}{12a}(-\hat{z})$ e $\vec{B}_4 = \dfrac{\mu_0 i}{12b}(\hat{z})$, dove $\hat{z}$ e' il versore dell'asse z perpendicolare al piano del foglio. In totale $\vec{B}_{\text{tot}} = \dfrac{\mu_0 i}{12}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)(\hat{z})$ di modulo 6.5 10^{-6} T.



b) La forza agente sui due tratti rettilinei e' uguale in modulo a $\left|\vec{F}_{1,3}\right| = i\,(a-b)\,B$ =0.21 N ed ha verso e direzione come indicato nella figura a fianco.

$\boldsymbol{\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = i\,(a-b)\,B}\; 2\sin(\alpha/2)\,\boldsymbol{\hat{y}}$.

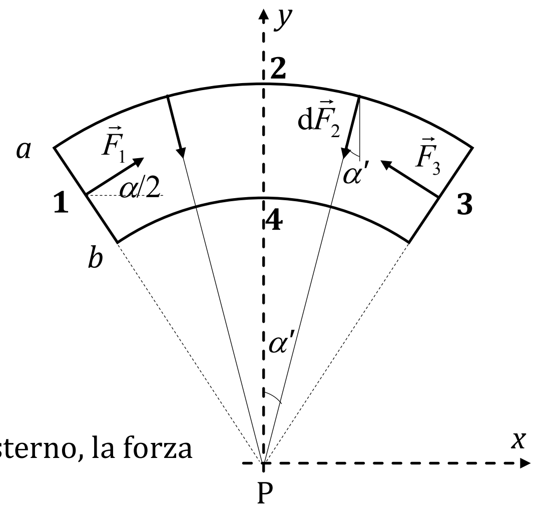
La forza agente su ciascuno dei tratti infinitesimi appartenenti ai due rami curvi della spira e' diretta radialmente verso il punto P. Come mostrato nella figura la sola componente vettoriale che rimane e' quella parallela all'asse *y*.

$$\vec{F}_2 = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} i\, B \cos\alpha'\, a\, \mathrm{d}\alpha'\,(-\hat{y}) = 2\, i\, a\, B \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)(-\hat{y}).$$

Similmente $\vec{F}_4 = 2\, i\, b\, B \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)(\hat{y})$.

Da cui $\vec{F}_2 + \vec{F}_4 = i\,(b-a)\,B\; 2\sin(\alpha/2)\,\hat{y}$.

$\left|\vec{F}_2\right| = 0.63$ N e $\left|\vec{F}_4\right| = 0.42$ N.



Come aspettato dalla uniformità del campo magnetico esterno, la forza $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B})$ agente sulla spira e' nulla.

Esercizio 3:

La resistenza della spira è $R= \rho\ 4\ L/S$ =1,0·10^{-2} Ω
Il flusso magnetico concatenato con la spira è costante finché il lato superiore non esce completamente dalla zona di campo magnetico (al tempo che fissiamo a t=0), poi è
$\Phi = B\ L\ (L-v_0t)/2$, e diventa nullo quando anche il lato inferiore esce dalla zona di B non nullo.
La forza elettromotrice indotta, mentre la spira, esce è:
$f_{em} = -d\Phi/dt = B\ Lv_0/2$
e quindi la corrente indotta, che risulta circolare in senso antiorario, è:
$i = B\ Lv_0/2R$ = 4,88 A
L'energia dissipata per effetto Joule e'

$$\boldsymbol{E}_J = \int_0^{L/v_o} \boldsymbol{R i}^2 \boldsymbol{dt} = \frac{1}{4\mathrm{R}}\mathrm{B}^2\mathrm{L}^3\mathrm{v_o} = 1{,}25\ \mathrm{J}$$

Il lavoro meccanico per portare fuori dalla zona di campo magnetico la spira e'

$$\boldsymbol{L_m} = \int_0^L (\vec{\boldsymbol{F}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_2 + \vec{\boldsymbol{F}}_3 + \vec{\boldsymbol{F}}_4)\cdot \boldsymbol{d\vec{s}} = \int_0^L \vec{\boldsymbol{F}}_1 \cdot \boldsymbol{d\vec{s}} = \frac{1}{4\mathrm{R}}\mathrm{B}^2\mathrm{L}^3\mathrm{v_o} = 1{,}25\ \mathrm{J}$$

avendo indicato con $\vec{\boldsymbol{F}}_1 = -\boldsymbol{iB}\frac{\boldsymbol{L}}{2}\hat{\boldsymbol{y}}$ la forza applicata al lato inferiore della spira che ha verso opposto sia all'asse y che allo spostamento elementare .
$\vec{F}_i$, (con *i=2,3,4*), sono le forze applicate sugli altri lati che sono nulle o il cui contributo al lavoro e' nullo essendo perpendicolari allo spostamento elementare.

Esercizio 4:

a) La densità di corrente di spostamento è:

$$\mathrm{J} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{t}}$$

$$\text{poichè : } \mathrm{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{S}}{\varepsilon_0} \text{ con } \mathrm{Q = CV \text{ e } C} = \varepsilon_0 \frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{x(t)}} = \varepsilon_0 \frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{d}_0 + \boldsymbol{vt}}$$

avremo :

$$\mathrm{J} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{t}}\left[\frac{\boldsymbol{CV}}{\varepsilon_0 \boldsymbol{S}}\right] = \varepsilon_0 \boldsymbol{V}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{t}}\left[\frac{1}{\boldsymbol{d}_0 + \boldsymbol{vt}}\right] = -\varepsilon_0 \frac{\boldsymbol{V}}{(\boldsymbol{d}_0 + \boldsymbol{vt})^2}\ \boldsymbol{v}$$

b) J(2s) = -5.4 10^{-8} A/m^2 in cui il segno negativo indica che il vettore **J** è opposto a **E**, e I_S= 4,3·10^{-10} A .

c) Se la resistenza ohmica del circuito non fosse trascurabile la d.d.p. ai capi del condensatore non potrebbe essere considerate costante, ma dipenderebbe dal tempo. La carica sulle armature Q(t), e' ottenibile come soluzione dell'equazione:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{I(t)R} + \boldsymbol{V_C(t)} = \frac{\boldsymbol{dQ(t)}}{\boldsymbol{dt}}\boldsymbol{R} + \frac{\boldsymbol{Q(t)}}{\boldsymbol{C}} = \frac{\boldsymbol{dQ(t)}}{\boldsymbol{dt}}\boldsymbol{R} + \frac{\boldsymbol{Q(t)(vt + d_0)}}{\varepsilon_0 \boldsymbol{S}}$$

che risulta non integrabile in modo elementare.