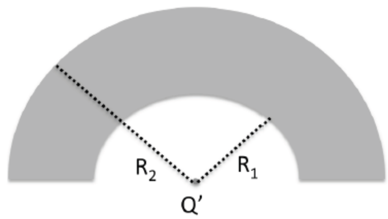
Prova scritta di Elettromagnetismo A.A. 2011/2012

6 Novembre 2012

(Proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese)

Esercizio 1

Sulla semicorona piana circolare disegnata in figura ($R_1 = 3.0\ cm$, $R_2 = 5.0\ cm$) è distribuita uniformemente una carica $Q = 1.8 \cdot 10^{-8}\ C$. Calcolare:
a) le componenti del momento di dipolo elettrico del sistema formato dal settore circolare e da una carica puntiforme $Q' = -Q$ posta al centro della semicorona,
b) le componenti della forza che la carica Q' esercita sulla semicorona.



Esercizio 2

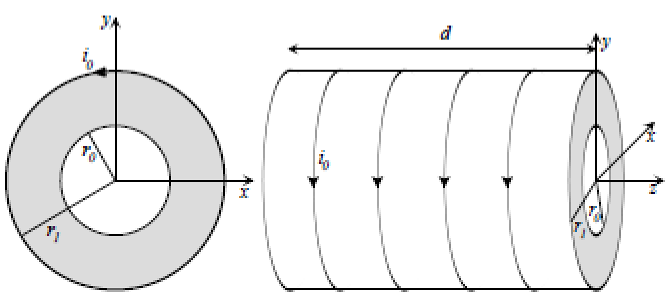
Un solenoide lungo $d = 100$ cm è costituito da $N = 10^4$ spire percorse da corrente $i_0 = 1$ A avvolte su un cilindro cavo di raggio interno $r_0 = 1$ cm e raggio esterno $r_1 = 2$ cm composto da un materiale ferromagnetico con permeabilità magnetica relativa costante $\mu_r = 70$. Nell'approssimazione di solenoide indefinito, determinare:

1) i valori di B, H ed M nel ferromagnete e nel vuoto internamente al solenoide;

2) i valori delle correnti amperiane di superficie e di volume presenti nel ferromagnete;

3) l'espressione delle densità di corrente amperiana di superficie e di volume nel caso in cui il materiale ferromagnetico sia non omogeneo, descritto da una permeabilità magnetica relativa della forma $\mu_r = \alpha r^2 = \alpha(x^2 + y^2)$, con $\alpha = 50\ \text{cm}^{-2}$;

4) i valori delle correnti amperiane di superficie e di volume nel materiale ferromagnetico nelle condizioni del punto 3).



Esercizio 3

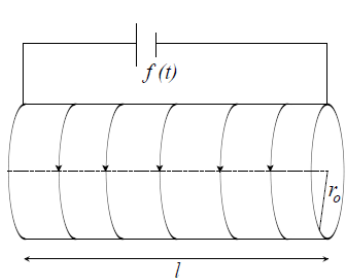
Al tempo $t = 0$ un generatore di forza elettromotrice dipendente dal tempo con legge $f = k \cdot t$ ($k = 0.2\ \text{V s}^{-1}$) viene applicato ad un solenoide cilindrico di $N = 3000$ spire di resistenza trascurabile, avente lunghezza $l = 3$ m e raggio $r_o = 2$ cm. Nell'approssimazione di solenoide indefinito, si determini:

a) l'espressione in funzione del tempo della corrente i che passa nel solenoide e del campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ al suo interno;

b) il campo elettrico $\mathbf{E}$ in funzione della distanza r dall'asse del solenoide, all'interno e all'esterno del solenoide stesso, specificandone direzione e verso;

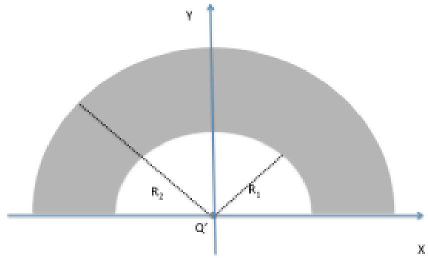
c) il vettore di Poynting in funzione della distanza r dall'asse (specificandone direzione e verso);

d) il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale del solenoide calcolandone il valore numerico all'istante $t = 2$ s (trascurare gli effetti di bordo).



Soluzione Esercizio 1

a) Il problema è bidimensionale, quindi per calcolare il momento di dipolo del sistema carica puntiforme - settore circolare scegliamo il sistema di riferimento cartesiano con origine nella carica Q' ed asse y rivolto verso l'alto della figura e coincidente con l'asse di simmetria del settore. L'asse x è perpendicolare all'asse y ed orientato da sinistra verso destra.



Sia poi σ la densità superficiale di carica del settore:

$$\sigma = \frac{Q}{\frac{\pi}{2}({R_2}^2 - {R_1}^2)}$$

Essendo la carica Q' posta nell'origine del sistema di riferimento, segue che le componenti del momento di dipolo sono

$$p_x = \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2} x\sigma r d\phi dr = \sigma \int_0^\pi cos\phi d\phi \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr == 0$$

$$p_y = \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2} y\sigma r d\phi dr = \sigma \int_0^\pi sin\phi d\phi \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr == \frac{2}{3}\sigma({R_2}^3 - {R_1}^3) = 4.7 \cdot 10^{-10}\ Cm$$

b) Data la simmetria del problema il campo elettrico $\vec{E}$ al centro del settore circolare il campo elettrico ha per componenenti

$$E_x = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi cos\phi d\phi \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2}{r^3} dr = 0$$

$$E_y = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi sin\phi d\phi \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2}{r^3} dr = -\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} ln(\frac{R_2}{R_1})$$

Essenso $Q' = -Q$ la forza che il settore esercita sulla carica è attrattiva e diretta come l'asse y, la sua componente è positiva.

Tuttavia si richiede l'espressione della forza che la carica Q' esercita sul settore che, per il terzo principio della dinamica, è uguale ed opposta alla precedete ed è quindi rivolta verso il basso e pari

$$F_y = -Q\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} ln(\frac{R_2}{R_1}) = -1.2 \cdot 10^{-3}\ N$$

Soluzione Esercizio 2

1) Nell'approssimazione di solenoide indefinito i campi sono nulli all'esterno del solenoide e diretti lungo z all'interno. Il campo $\mathbf{H}$ si ottiene dal teorema della circuitazione di Ampère

$$\begin{array}{ll} H_0 = Ni/d \simeq 10^4 \text{ A/m} & \text{(nel vuoto)} \\ H = H_0 \simeq 10^4 \text{ A/m} & \text{(nel ferromagnete)} \end{array}$$

Il campo $\mathbf{B}$ si ottiene dalla relazione $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$:

$$\begin{array}{ll} B_0 = \mu_0 H_0 = \mu_0 Ni/d \simeq 1.26 \cdot 10^{-2} \text{ T} & \text{(nel vuoto)} \\ B = \mu_0\mu_r H = \mu_0\mu_r Ni/d \simeq 0.88 \text{ T} & \text{(nel ferromagnete)} \end{array}$$

Il vettore di magnetizzazione $\mathbf{M}$ si ottiene dalla relazione $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = (\mu_r - 1)\mathbf{H}$:

$$\begin{array}{ll} M_0 = 0 & \text{(nel vuoto)} \\ M = (\mu_r - 1)H = (\mu_r - 1)Ni/d \simeq 6.9 \cdot 10^5 \text{ A/m} & \text{(nel ferromagnete)} \end{array}$$

2) Le correnti amperiane si ottengono dalle relazioni: $\mathbf{J}_s = \mathbf{M} \wedge \mathbf{n}$ per la densità di corrente superficiale e $\mathbf{J}_v = \nabla \wedge \mathbf{M}$ per la densità di corrente di volume. Nel caso di materiale omogeneo $\mathbf{J}_v = 0$ e

$$\begin{array}{lll} i_s^e = J_s^e d = Md \simeq 6.9 \cdot 10^5 \text{ A} & \text{e verso come } i_0 & \text{(sulla superficie esterna)} \\ i_s^i = J_s^i d = Md \simeq 6.9 \cdot 10^5 \text{ A} & \text{e verso opposto ad } i_0 & \text{(sulla superficie interna)} \end{array}$$

3) Nel caso di mezzo non omogeneo (nel caso in esame μ_r e quindi $M = (\mu_r - 1)H$ dipendono dalla distanza r dall'asse del solenoide: $\mu_r(r) = \alpha r^2$) si hanno ancora correnti amperiane di superficie, la cui densità è

$$\begin{array}{lll} J_s^e = M(r_1) = (\alpha r_1^2 - 1)H & \text{e verso come } i_0 & \text{(sulla superficie esterna)} \\ J_s^i = M(r_2) = (\alpha r_0^2 - 1)H & \text{e verso opposto ad } i_0 & \text{(sulla superficie interna)} \end{array}$$

ed anche una corrente amperiana di volume, la cui densità è $\mathbf{J}_v = \nabla \wedge \mathbf{M}$:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{J}_v = 2\alpha H(y\hat{x} - x\hat{y}) & \text{(in coordinate cartesiane)} \\ \mathbf{J}_v = -2\alpha H r\hat{\varphi} & \text{(in coordinate cilindriche)} \end{array}$$

tangente alle circonferenze coassiali con il cilindro e circolante in verso opposto a i_0.

4) Le correnti amperiane di superficie sono date da

$$\begin{array}{ll} i_s^e = J_s^e d = (\alpha r_1^2 - 1)Hd \simeq 1.99 \cdot 10^6 \text{ A} & \text{(sulla superficie esterna)} \\ i_s^i = J_s^i d = (\alpha r_0^2 - 1)Hd \simeq 4.9 \cdot 10^5 \text{ A} & \text{(sulla superficie interna)} \end{array}$$

La corrente amperiana di volume si ottine dal flusso di $\mathbf{J}_v$ attraverso una sezione rettangolare del cilindro ferromagnetico

$$i_v = \int_S \mathbf{J}_v \cdot \mathbf{n} dS = 2\alpha Hd \int_{r_0}^{r_1} dr\ r = \alpha Hd(r_1^2 - r_0^2)$$

come si ottiene anche, per il teorema di Stokes, dalla circuitazione di $\mathbf{M}$ lungo il perimetro ℓ della sezione rettangolare

$$i_v = \oint_\ell \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = [M(r_1) - M(r_0)]d = \alpha Hd(r_1^2 - r_0^2)$$

Numericamente

$$i_v \simeq 1.5 \cdot 10^6 \text{ A} .$$

Si noti che il contributo totale delle correnti amperiane è nullo (tenendo conto dei versi di percorrenza $i_s^e - i_s^i - i_v = 0$), come ci si poteva aspettare dovendo essere il campo $\mathbf{B_0}$ nel vuoto al centro del solenoide indipendente dalle caratteristiche del materiale e quindi dalle correnti amperiane ($B_0 = \mu_0 H_0 = \mu_0 Ni/d$) e considerando che la circuitazione di $\mathbf{B_0}$ lungo un percorso concatenato con il cilindro è legato alla corrente totale (correnti macroscopiche più amperiane) attraverso la superficie delimitata dal percorso.

Soluzione Esercizio 3

a) L'equazione del circuito, considerando la resistenza trascurabile, è $f - Ldi/dt = 0$, dove $L = \mu_o N^2 \pi r_o^2 / l$ è l'induttanza del solenoide indefinito. Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$i(t) = \frac{k}{2L}\, t^2 = \frac{kl}{2\mu_o N^2 \pi r_o^2}\, t^2 \; .$$

Il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$, diretto lungo l'asse, è

$$B(t) = \frac{\mu_o N i(t)}{l} = \frac{k}{2N\pi r_o^2}\, t^2 \; .$$

b) Dall'equazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -d\mathbf{B}/dt$ in forma integrale $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -d\Phi(\mathbf{B})/dt$, si ottiene (considerando circonferenze di raggio $r < r_o$)

$$E(r,t) = -\frac{1}{2\pi r} \pi r^2 \frac{dB}{dt} = -\frac{ktr}{2\pi N r_o^2} \qquad \text{per } r < r_o \; ,$$

avendo tenuto conto della simmetria del problema, per cui $\mathbf{E}$ è tangente alle circonferenze centrate sull'asse. Il verso di $\mathbf{E}$ risulta contrario a quello di percorrenza della corrente i, ossia orario se visto dall'asse di $\mathbf{B}$ positivo. Considerando circonferenze di raggio $r > r_o$ si ha invece (il flusso di $\mathbf{B}$ è non nullo solo all'interno del solenoide)

$$E(r,t) = -\frac{1}{2\pi r} \pi r_o^2 \frac{dB}{dt} = -\frac{kt}{2\pi N r} \qquad \text{per } r > r_o \; .$$

c) Il vettore di Poynting, definito da $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_o$, è non nullo all'interno del solenoide ed il suo modulo è

$$|\mathbf{S}(r,t)| = \frac{|E||B|}{\mu_o} = \frac{k^2 t^3 r}{\mu_o r_o^4 (2\pi N)^2} \; ,$$

normale all'asse del solenoide e con verso entrante.

d) Il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale del solenoide è

$$\Phi_{\mathbf{S}}(t) = -|\mathbf{S}(r_o,t)|\; 2\pi r_o l = \frac{k^2 t^3 l}{2\pi \mu_o r_o^2 N^2} \; ,$$

e per $t = 2$ s si ottiene

$$\Phi_{\mathbf{S}}(t = 2\text{s}) \simeq \; -33.8 \text{ W} \; .$$

Si noti il segno negativo, indicante un flusso entrante: il generatore, facendo aumentare la corrente nel solenoide e quindi il campo in esso presente, sta trasferendo energia all'interno del solenoide.