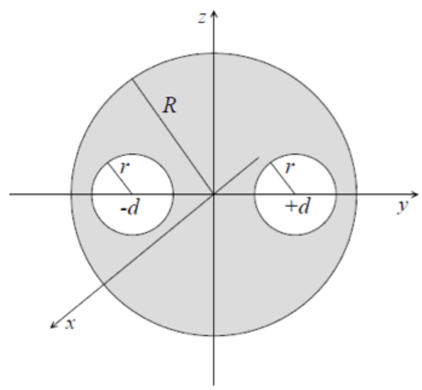
Compito scritto del Corso di Elettromagnetismo A.A. 2013/2014

6 Novembre 2013

(Proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese)

Esercizio 1

Una sfera di raggio $R = 4.0\ cm$ uniformemente carica con densità di carica ρ, ha al suo interno due cavità sferiche di raggio$r = 1.0\ cm$ centrate sull'asse y a $y = \pm d$, con $d = 2.0\ cm$.
Si determini:
a) il valore della densità di carica ρ, sapendo che il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa che racchiude la sfera vale $\Phi(\vec{E}) = 1.7 \cdot 10^4\ Vm$,
b) l'espressione del campo E sull'asse z per $0 < z < R$ e per $z > R$,
c) il valore del potenziale rispetto all'infinito sull'asse z nel punto $z = R$.



Esercizio 2

Una spira quadrata di lato $l = 2\ cm$ e resistenza $R = 10\ \Omega$ è posta in modo che uno dei suoi vertici si trovi sull'asse di un solenoide molto lungo, di raggio $r = l/2$, e che il piano della spira sia perpendicolare all'asse del solenoide. Il numero di spire per unità di lunghezza del solenoide è $n = 1000\ spire/m$. Tramite un generatore di corrente si fa passare nel solenoide una corrente con legge temporale $i(t) = i_0[1 - e^{(-t/\tau)}]$, dove $i_0 = 0.3\ A$ e $\tau = 10\ ms$.
a) Si calcoli il coefficiente di mutua induzione tra spira e solenoide.
b) Si determini, trascurando l'autoinduzione, l'andamento nel tempo della corrente indotta nella spira quadrata.
c) Si calcoli l'energia complessivamente dissipata nella resistenza della spira quadrata a partire dall'istante $t = 0$ (fino a $t = \infty$).

Esercizio 3

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $\nu = 10\ MHz$, polarizzata linearmente, si propaga nella direzione dell'asse x. Nell'origine del sistema di coordinate è posta una spira circolare di area $S = 20\ cm^2$. Il versore $\hat{n}$ normale al piano della spira giace nel piano (y, z) e forma un angolo θ con l'asse y.
a) Si verifichi che la lunghezza d'onda è molto maggiore del raggio della spira;
b) Sapendo che la forza elettromotrice indotta nella spira è massima quando $\theta = \pi/3$ e che il suo valore massimo vale $1.26\ mV$, si determini l'espressione delle componenti del campo elettrico e di induzione magnetica lungo gli assi x, y, z in funzione delle coordinate spaziali e temporali.
c) Si calcoli la forza a cui è soggetta una superficie piana completamente assorbente di area $A = 0.5\ m^2$, investita dall'onda, la cui normale forma un angolo $\alpha = \pi/4$ con la direzione dell'asse x.

Soluzione

Esercizio 1

a) Dal teorema di Gauss $\Phi(E) = Q/\epsilon_o$ si ottiene Q e quindi, dividendo per il volume della sfera cava, si ha ρ:

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi(R^3 - 2r^3)} = \frac{3\Phi\epsilon_o}{4\pi(R^3 - 2r^3)} = 5.8 \cdot 10^{-4}\ C/m^3$$

b) Il campo $\vec{E}$ si può pensare come sovrapposizione dei campi generati da una sfera carica con densità ρ di raggio R centrata nell'origine e due sfere cariche con densità $-\rho$ di raggio r centrate rispettivamente in $\pm d$. Sull'asse z, per ragioni di simmetria, il campo è diretto lungo z, $\vec{E} = E\hat{z}$ e la sua espressione in funzione di z è, per $z > R$

$$E(z) = \frac{\rho}{3\epsilon_o}\left[\frac{R^3}{z^2} - \frac{2zr^3}{(d^2 + z^2)^{3/2}}\right]$$

e per $z < R$

$$E(z) = \frac{\rho}{3\epsilon_o}\left[z - \frac{2zr^3}{(d^2 + z^2)^{3/2}}\right]$$

essendo, in entrambe le espressioni, il primo termine il campo generato dalla sfera positiva (all'esterno per $z > R$ e all'interno per $z < R$) ed il secondo il campo generato dalle due sfere negative.

c) Il potenziale nel punto $z = R$ si ottiene per integrazione del campo (o per sovrapposizione dei potenziali della sfera positiva e di quelle negative)

$$V(R) = \int_R^\infty E(z)\ dz = \frac{\rho}{3\epsilon_o}\left[R^2 - \frac{2r^3}{(d^2 + R^2)^{1/2}}\right] = 3.4 \cdot 10^4 \quad V$$

Esercizio 2

a) Il campo $\vec{B}$ è uniforme e diretto come l'asse del solenoide; il suo modulo è:

$$B = \mu_o in$$

Il flusso di $\vec{B}$ va calcolato attraverso la superficie ottenuta dall'intersezione della superficie quadrata della spira e la sezione circolare del solenoide. Tenendo conto che il vertice della spira quadrata è posto al centro dl solenoide, se ne deduce che tale intersezione è pari a $\pi r^2/4$. Qundi il flusso di $\vec{B}$ è

$$\Phi(\vec{B}) = \frac{\mu_o}{4} inr^2\pi$$

e il coefficiente di mutua induzione M è

$$M = \frac{\mu_o}{4} nr^2\pi = 9.9 \cdot 10^{-8}\ H$$

b) Indicando con $I(t)$ la corrente indotta nella spira quadrata e con $i(t)$ quella nel solenoide, si ha che

$$RI = -M\frac{di}{dt} = -\frac{i_0 M}{\tau} e^{-t/\tau}$$

da cui deduciamo

$$I(t) = -\frac{i_0 M}{\tau R} e^{-t/\tau}$$

c) Per l'energia complessiva dissipata nella resistenza della spira quadrata si trova:

$$W = \int_0^\infty RI^2 dt = \int_0^\infty \frac{i_0 M^2}{\tau^2 R} e^{-2t/\tau} dt = \frac{{i_0}^2 M^2}{2\tau R} = 4.4 \cdot 10^{-15}\ J$$

Esercizio 3

a) Per confrontare la lunghezza d'onda λ con il raggio R della spira circolare, deduciamo ambedue i valori numerici:

$$\lambda = \frac{\nu}{c} = 30\ m \qquad\qquad R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 2.5\ cm$$

da cui risulta evidente che $\lambda \gg R$.

b) Introduciamo le quantità $\omega = 2\pi\nu$ e $k = 2\pi/\lambda$. Calcoliamo poi la forza elettromotrice indotta f_i:

$$f_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot\hat{n}dS = \omega B_o S sin(kx - \omega t)$$

Il valore massimo di f_i è

$$f_{i max} = \omega B_o S$$

da cui possiamo dedurre B_o e quindi l'ampiezza del campo elettrico E_o:

$$B_o = \frac{f_{i max}}{\omega S} = 1\cdot 10^{-8}\ T \qquad\qquad E_o = B_o c = 3\ V/m$$

La forza elettromotrice indotta è massima quando $\vec{B}$ è parallelo a $\hat{n}$, di conseguenza la direzione del campo di induzione magnetica $\vec{B}$ forma un angolo $\theta = \pi/3$ con l'asse delle y. In conclusione abbiamo

$$B_x = 0 \qquad B_y = B_o cos(kx - \omega t) cos\theta \qquad B_z = B_o cos(kx - \omega t) sin\theta$$

Il campo elettrico è $\vec{E} = \vec{B}\times\vec{c}$, quindi

$$E_x = 0 \qquad E_y = E_o cos(kx - \omega t) sin\theta \qquad E_z = -E_o cos(kx - \omega t) cos\theta$$

c) La pressione di radiazione P_r è dedotta attraverso il calcolo dell'intensità media I dell'onda:

$$P_r = \frac{I}{c} = \frac{1}{c}\frac{{E_o}^2}{2Z_o}$$

La forza F esercitata sulla superficie assorbente si ottiene moltiplicando P_r per la proiezione di A sul piano perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda

$$F = \frac{I}{c} A\ cos\alpha = 1.4\cdot 10^{-11}\ N$$