Corso di Elettromagnetismo

prova scritta del 02 Febbraio 2015

Proff. F. Lacava, D. Trevese

Esercizio 1

Un'asticella sottile di lunghezza $l = 3$ cm è disposta lungo l'asse x, con il centro nell'origine O delle coordinate. Su di essa è distribuita una carica elettrica con densità lineare $\lambda = \lambda_o + \lambda_1 x^3/|x|$, con $\lambda_o = 2\ \mu\mathrm{C\ m^{-1}}$ e $\lambda_1 = 0.5\ \mathrm{Cm^{-3}}$. Una carica elettrica puntiforme $Q = 120$ nC è posta in un punto $P(x_o, y_o, 0)$ del piano (x, y), a distanza $d = 3$ m dall'origine O, in una direzione formante un angolo $\theta = 30^o$ con l'asse x. Si determinino:

a) il potenziale $V_P(x_o, y_o, 0)$ del campo elettrico prodotto in P da tutta la carica distribuita sull'asticella;

b) il potenziale V_o ed il campo elettrico $\vec{E}_o$ prodotto dalla carica Q nell'origine delle coordinate, specificando modulo, direzione e verso;

c) il momento meccanico cui è soggetta l'asticella a causa del campo $\vec{E}_o$;

d) la forza tra l'asticella e la carica puntiforme Q.

Esercizio 2

Un conduttore, formato da due sottili superfici cilindriche coassiali di raggi $r_1 = 2$ mm e $r_3 = 1$ cm, è connesso a una delle sue estremità a un alimentatore di tensione $V_0 = 20$ V e all'altra estremità a una resistenza R=4.7 $k\Omega$. La corrente scorre uniformemente sulle due superfici cilindriche conduttrici. Nello spazio tra le due superfici cilindriche di raggi r_1 e $r_2 = 4$ mm, è presente un materiale ferromagnetico, omogeneo con permeabilità magnetica relativa $\mu_r = 100$ da considerarsi costante, opportunamente rivestito da un isolante. Assumendo che la lunghezza del conduttore sia molto maggiore del suo raggio, si determini:

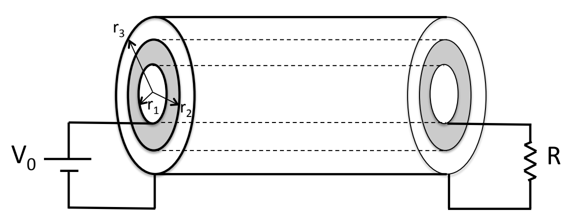
a) il campo d'induzione magnetica in funzione della distanza dall'asse del sistema cilindrico;

b) le correnti amperiane presenti indicando: dove scorrono, la loro densità, la direzione e il verso;

c) l'induttanza del sistema per unità di lunghezza.

Si riportano le seguenti relazioni lasciando allo studente la possibilità di usarle:

$$rot\ \vec{A}: \quad (rot\ \vec{A})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \qquad (rot\ \vec{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \qquad (rot\ \vec{A})_z = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right]$$



Esercizio 3

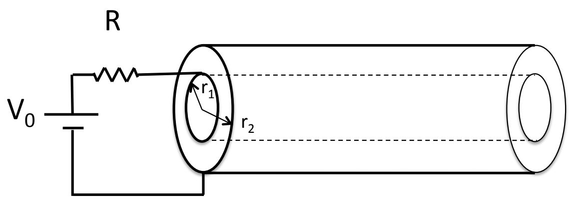
Un condensatore cilindrico ha le armature di raggi $r_1 = 3.0$ cm e $r_2 = 7.0$ cm, è lungo $l = 20$ cm e tra le armature c'è il vuoto. Inizialmente il condensatore è scarico e dall'istante $t = 0$ viene caricato da un generatore di tensione $V_0 =\ 20\ V$ attraverso una resistenza $R = 2.7\ k\Omega$. Trascurando gli effetti di bordo, si calcoli:

a) come varia il campo elettrico tra le armature del condensatore in funzione della posizione e del tempo,

b) la densità di corrente di spostamento in funzione della posizione e del tempo,

c) la corrente totale di spostamento in funzione del tempo,

d) l'integrale sul tempo della corrente di spostamento durante la carica del condensatore.



Soluzioni della prova scritta

Esercizio 1

a)

La carica totale dell'asticella é $q = \int_{-l/2}^{+l/2} \lambda(x')dx' = \lambda_o l = 6 \cdot 10^{-8}$ C= 60 nC.

Il momento di dipolo dell'asticella é: $p_y = p_z = 0, \quad p_x = \int_{-l/2}^{+l/2} \lambda(x')x'dx' = 2\lambda_1 \int_0^{+l/2} x'^3 dx' = 2\lambda_1 [\frac{x'^4}{4}]_0^{l/2} = \lambda_1 l^4/32 = 1.26 \cdot 10^{-8}$ Cm.

Il potenzial dovuto alla carica q e al dipolo $\vec{p}$ é:

$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{(x^2+y^2)^{1/2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, che in P vale:

$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{px_o}{d^2}$ =191 V.

b)

Il potenziale del campo della carica Q é, nell'origine:

$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q}{d^2} = 359$ V Il campo prodotto dalla carica Q é:

$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q(\vec{r}-\vec{r_o})}{|(\vec{r}-\vec{r_o})|^3} \Longrightarrow$

$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q(x-x_o)}{|(\vec{r}-\vec{r_o})|^3}$, $E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q(y-y_o)}{|(\vec{r}-\vec{r_o})|^3}$, $E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Qz}{|(\vec{r}-\vec{r_o})|^3}$, che nell'origine delle coordinate valgono:

$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{-Qx_o}{d^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{-Qcos\theta}{d^2}$ = -104 Vm^{-1} , $E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{-Qy_o}{d^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{-Qsin\theta}{d^2}$ = - 60 Vm^{-1}, $E_z = 0$, da cui $E = |\vec{E}| = 120$ V

c)

Il momento meccanico vale: $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$ e risulta $M_z = -pEsin\theta = -7.6 \times 10^{-7}$ Nm.

d)

La forza agente sulla carica q vale $\vec{f^{(1)}} = q\vec{E}$ e nell'origine delle coordinate si ha $f_x^{(1)} = qE_x = 3.60 \cdot 10^{-6}$ N, $f_y^{(1)} = qE_y = 6.24 \cdot 10^{-6}$ N La forza agente sul dipolo é $\vec{f^{(2)}} = -\vec{\nabla}U$ da cui (essendo $\vec{p}$ costante ed il campo $\vec{E}$ conservativo) e tenuto conto che $\vec{p}$ é diretto lungo l'asse x, cioé $\vec{p} \equiv p, 0, 0$, si ha:

$f_x^{(2)} = \vec{p}\cdot\vec{\nabla}E_x = p\frac{\partial E_x}{\partial x}, \quad f_y^{(2)} = \vec{p}\cdot\vec{\nabla}E_y = p\frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad f_z^{(2)} = \vec{p}\cdot\vec{\nabla}E_z = p\frac{\partial E_z}{\partial x}$

Pertanto: in $x = y = z = 0$ si ha:

$f_x^{(2)} = p\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_o}\frac{1-3cos^2\theta}{d^3}$

$f_y^{(2)} = p\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_o}\frac{-3cos\theta sin\theta}{d^3}$

$f_x^{(2)} = p\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0.$

Notare che la forza che la carica Q esercita sul dipolo é uguale alla forza che il dipolo esercita sulla carica Q cambiata di segno. Quest'ultima é data da:

$\vec{f^{(3)}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}-r^2\vec{p}}{r^5}\}$, che per $\vec{p} \equiv (p, 0, 0)$ vale, in P:

$f_x^{(3)} = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_o}\frac{3cos^2\theta-1}{d^3}$, $f_y^{(3)} = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_o}\frac{3cos\theta sin\theta}{d^3}$, $f_z^{(3)} = 0$, che corrisponde al risultato precedente.

Pertanto, essendo la forza totoale $\vec{f} = \vec{f^{(1)}} + \vec{f^{(2)}}$si ha:

$f_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{qcos\theta}{d^2} + \frac{p(1-3cos^2\theta)}{d^3}\}$, $f_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{qsin\theta}{d^2} - \frac{p3cos\theta sin\theta)}{d^3}\}$, $f_z = 0$

Esercizio 2

a)

La corrente erogata dal generatore $I = V_0/R$ scorre uniformemente sulle due superfici cilindriche, con direzione parallela all'asse ma con verso opposto sulle due. Per il teorema della circuitazione, tra le superfici cilindriche è presente un campo H, con linee di forza circolari centrate sull'asse del sistema, che è funzione della distanza r dall'asse:

$$2\pi r H = I \quad \text{per } r_1 < r < r_3 \qquad H = \frac{I}{2\pi r}$$

per $r < r_1$ e per $r > r_3$ il campo H è nullo. Il vettore induzione magnetica B è quindi:

$$B = \mu_r\mu_0 H \quad \text{per } r_1 < r < r_2$$

$$\text{e} \quad B_0 = \mu_0 H \quad \text{per } r_2 < r < r_3.$$

$$\text{mentre} \quad B = 0 \quad \text{per } r < r_1 \text{e } r > r_3$$

All'interno del materiale ferromagnetico l'intensità di magnetizzazione ha linee di forza circolari e modulo $M = \chi_m H = (\mu_r - 1)H$ mentre è nulla all'esterno.

b)
Nel materiale ferromagnetico con μ_r costante la corrente amperiana di volume è nulla. Infatti $\vec{J_{mv}} = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{\nabla} \times (\epsilon_r - 1)\vec{H} = (\epsilon_r - 1)\vec{\nabla} \times \vec{H} = (\epsilon_r - 1)\vec{J} = 0$, poichè all'interno del materiale ferromagnetico ϵ_r è indipendente dal posto e $\vec{J} = 0$. Sulle due superfici cilindriche del materiale ferromagnetico scorrono delle correnti amperiane di superficie: $\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n}_e$ con $\hat{n}_e$ la normale uscente dalla superficie del materiale. In coordinate cilindriche con l'asse z coincidente con l'asse del sistema e $\hat{z}$ concorde con la direzione della corrente di conduzione a r_1, $\vec{M} = (M_r, M_\phi, M_z) = (0, M, 0)$. Sulla superficie a r_1 $\hat{n}_e = (-1, 0, 0)$ risulta $\vec{J}_{ms} = M\hat{z} = (\mu_r - 1)H\hat{z}$ nella direzione della corrente di conduzione; sulla superficie a r_2 $\hat{n}_e = (1, 0, 0)$ si trova $\vec{J}_{ms} = -M\hat{z} = -(\mu_r - 1)H\hat{z}$.
Sulle superfici di raggio r_1 ed r_2 si ha rispettivamente:
$J_{ms}(r_1) = 33.5$ Am^{-1} e $J_{ms}(r_2) = 16.8$ Am^{-1}
Sulle due superfici di base del materiale ferromagnetico è presente una corrente amperiana superficiale. Su quella in prossimità della resistenza il versore uscente è $\hat{n}_e = (0, 0, 1)$ e la corrente è $\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n}_e == M\hat{r} = (\mu_r - 1)I/2\pi r\ \hat{r}$, corrente uscente radialmente. Su quella in prossimità dell'alimentatore il versore uscente è $\hat{n}_e = (0, 0, -1)$ e la corrente è $\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n}_e = -M\hat{r} = -(\mu_r - 1)I/2\pi r\ \hat{r}$, corrente entrante radialmente.
c)
Il flusso del campo B calcolato su una sezione $r - z$ del sistema di lunghezza l è:

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} B(r)ldr + \int_{r_2}^{r_3} B_0(r)ldr = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left[\int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_r}{r}dr + \int_{r_2}^{r_3} \frac{1}{r}ldr\right] I$$

Hm^{-1} E quindi l'induttanza per unità di lunghezza è:

$$L = \frac{\Phi}{Il} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\mu_r log\frac{r_2}{r_1} + log\frac{r_3}{r_2}\right] = 1.4 \cdot 10^{-5}\ Hm^{-1}$$

Esercizio 3
a)
La capacità del condensatore cilindrico è: $C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{log(r_2/r_1)} = 13$ pF
Come noto la d.d.p. tra le armature in funzione del tempo è:

$$V(t) = V_0(1 - e^{-t/\tau}) \qquad \tau = RC = 35 \cdot 10^{-6}$$

s e il campo tra le armature a distanza r dall'asse del condensatore è:

$$E(r,t) = \frac{\lambda(t)}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \qquad \text{con la densità di carica } \lambda \text{ funzione del tempo.}$$

La densità di carica è:

$$\lambda(t) = \frac{Q}{l} = \frac{CV(t)}{l}$$

Il campo a distanza r e al tempo t è dato da:

$$E(r,t) = \frac{\lambda(t)}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{V_0(1 - e^{-t/\tau})}{log(r_2/r_1)}\frac{1}{r}$$

b)
La densità di corrente di spostamento è: $J_{sp}(r,t) = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\epsilon_0 V_0}{RC}\frac{1}{log(r_2/r_1)}\frac{e^{-t/\tau}}{r} = \frac{V_0}{R}e^{-t/\tau}\frac{1}{2\pi r l}$.
Si ha $J_{sp}(r_1) = 2 \cdot 10^{-3}$ Am^{-2} e $J_{sp}(r_2) = 0.84 \cdot 10^{-3}$ Am^{-2}
c)
La corrente totale di spostamento:

$$I_{sp}(t) = 2\pi r l J_{sp} = \frac{V_0}{R}e^{-t/\tau}$$

d)
Il suo integrale è: $\int_0^\infty I_{sp}(t)dt = \frac{\tau V_0}{R} = CV_0 = 2.6 \cdot 10^{-10}$ C= 0.26 nC pari naturalmente alla carica totaleinizialmente presente sul condensatore carico.