Compito scritto Elettromagnetismo

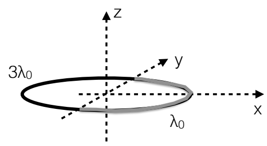
Appello speciale del 20-4-2017

(*S. Giagu/F. Lacava/S. Petrarca*)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 2.5 ore.

Esercizio 1

Una distribuzione lineare di carica ha forma di anello di raggio R, posto in un sistema di assi cartesiani con origine al centro dell'anello e asse z perpendicolare al piano dell'anello. La densità di carica è descritta dall'espressione:

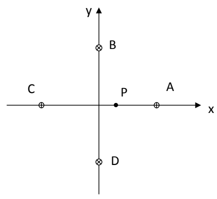


$$\lambda = \begin{cases} 3\lambda_0 & x < 0 \\ \lambda_0 & x \geq 0 \end{cases}$$

con λ_0 costante positiva.
Determinare:
a) l'espressione del potenziale elettrostatico generato dalla distribuzione di carica a grande distanza dalla distribuzione (trascurare termini superiori al dipolo);
b) l'espressione del campo elettrico prodotto dalla distribuzione su i punti dell'asse y per $y \gg R$;
c) l'espressione del momento meccanico agente su un dipolo elettrico di momento di dipolo $\mathbf{p} = p\hat{y}$ posto sull'asse y a distanza $a \gg R$ dall'origine.

Esercizio 2

Quattro fili paralleli all'asse $\hat{z}$, da considerarsi infinitamente lunghi, intersecano il piano xy nelle posizioni $A(d, 0, 0)$, $B(0, d, 0)$, $C(-d, 0, 0)$, $D(0, -d, 0)$. Una corrente I concorde con l'asse z scorre nei fili passanti per A e per C mentre una stessa corrente ma con direzione opposta si trova nei fili per B e D.



a) Si determinino le componenti dell'induzione magnetica nei punti sulla retta parallela all'asse z passante per il punto P di coordinate $(x, 0, 0)$.
b) Si dimostri che nell'approsimazione $x << d$ questo campo è lineare in x.
Si ricordi che per $\epsilon << 1$ vale l'approssimazione:

$$\frac{1}{1+\epsilon} \simeq 1 - \epsilon$$

c) Si determini la forza agente su una particella di carica negativa $-q$ con velocità iniziale $\vec{v}(0, 0, v)$ passante nel punto P a distanza $x << d$ dall'asse z.
d) Si scriva l'equazione del moto della particella indicando di che moto si tratta.

Soluzione 1

a)
La carica totale Q dell'anello è:

$$Q = \lambda_0 \frac{2\pi R}{2} + 3\lambda_0 \frac{2\pi R}{2} = 4\pi R \lambda_0.$$

Il momento di dipolo della distribuzione è dato dalla relazione:

$$\mathbf{P} = \oint \lambda \mathbf{r} dl.$$

Per ragioni di simmetria l'unica componente diversa da zero del momento di dipolo della distribuzione è la componente x, per la quale avremo:

$$P_x = \oint \lambda x dl = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lambda_0 R \cos\phi R d\phi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 3\lambda_0 R \cos\phi R d\phi = 2\lambda_0 R^2 - 6\lambda_0 R^2 = -4\lambda_0 R^2.$$

Il potenziale elettrostatico in approssimazione di multipolo approssimato al termine di dipolo risulterà quindi dato da:

$$\begin{aligned} V(x,y,z) &= \tfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\tfrac{Q}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + \tfrac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{r}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \\ &= \tfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\tfrac{4\pi R\lambda_0}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + \tfrac{-4\lambda_0 R^2 x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

b)

Le componenti del campo elettrico in qualunque punto dello spazio possono essere calcolate come gradiente del potenziale cambiato di segno, per cui avremo:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{dV}{dx} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{4\pi R\lambda_0 x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{4\lambda_0 R^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{4\lambda_0 R^2 3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right); \\ E_y &= -\frac{dV}{dy} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{4\pi R\lambda_0 y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{4\lambda_0 R^2 3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right); \\ E_z &= -\frac{dV}{dz} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{4\pi R\lambda_0 z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{4\lambda_0 R^2 3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right). \end{aligned}$$

Lungo l'asse y avremo ($x = z = 0$):

$$\begin{aligned} E_x(0,y,0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{4\lambda_0 R^2}{y^3}\right); \\ E_y(0,y,0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{4\pi R\lambda_0}{y^2}\right); \\ E_z(0,y,0) &= 0. \end{aligned}$$

c)

Il dipolo $\mathbf{p_0}$ è sottoposto al momento meccanico:

$$\mathbf{M} = \mathbf{p_0} \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ p_{0_x} & p_{0_y} & p_{0_z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & p_0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \hat{x} p_0 E_z - \hat{z} p_0 E_x = -\frac{p_0 4\lambda_0 R^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}\hat{z} = -\frac{p_0 \lambda_0 R^2}{\pi\epsilon_0 a^3}\hat{z}.$$

Soluzione 2

a)
Il campo generato dalle correnti in A e in C hanno solo componente y:

$$B_{Ay} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{d-x} \qquad\qquad B_{Cy} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{d+x}$$

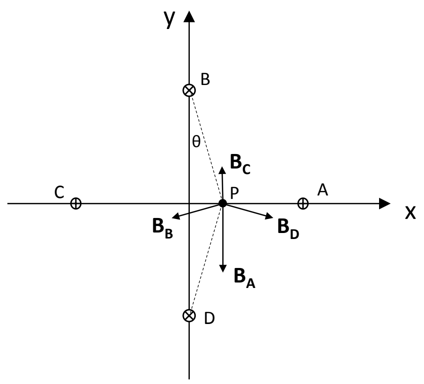
I campi generati da B e D si combinano vettorialmente e danno un campo con sola componente y:

$$B_{BDy} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{2I}{\sqrt{d^2+x^2}}\sin\theta = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{2Ix}{d^2+x^2} \qquad\qquad \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{d^2+x^2}}$$

Il campo in P ha solo componente y pari a:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[-\frac{1}{d-x} + \frac{1}{d+x} - \frac{2x}{d^2+x^2}\right]$$

b)



Riscrivendo il campo nella forma:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[-\frac{1}{d}\frac{1}{(1-\frac{x}{d})} + \frac{1}{d}\frac{1}{(1+\frac{x}{d})} - \frac{2x}{d^2}\frac{1}{(1+\frac{x^2}{d^2})}\right]$$

dopo aver sviluppato per $x/d << 1$ e conservato i termini al primo ordine in x/d si ottiene:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[-\frac{1}{d}\left(1+\frac{x}{d}\right) + \frac{1}{d}\left(1-\frac{x}{d}\right) - \frac{2x}{d^2}\left(1-\frac{x^2}{d^2}\right)\right] = -\frac{2\mu_0 I}{\pi}\frac{x}{d^2}$$

c)
Sulla particella agisce la forza di Lorentz $\vec{F} = -q\vec{v}\times\vec{B}$. Dal prodotto vettoriale si trova che la forza ha la sola componente x:

$$F_x = -qv\frac{2\mu_0 I}{\pi d^2}x$$

d)
La velocità della particella conserva la componente v nella direzione z e componente nulla in y mentre in funzione del tempo la componente x è determinata dall'equazione armonica:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -qv\frac{2\mu_0 I}{\pi d^2}x$$

che le fa compiere nel piano xz una traiettoria sinusoidale intorno all'asse z con periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\pi d^2}{2\mu_0 qvI}} \quad .$$