**Prova Scritta Elettromagnetismo - 24.7.2017**

*(a.a. 2016/17, S. Giagu/F. Lacava/S. Petrarca)*

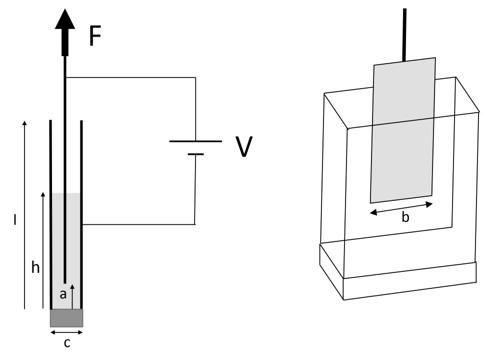
---

recupero primo esonero: risolvere l'esercizio 1: tempo massimo 1.5 ore.
recupero secondo esonero: risolvere l'esercizio 2: tempo massimo 1.5 ore.
intero scritto: risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3.5 ore.

---

**Esercizio 1**

Una lamina metallica rettangolare di larghezza $b = 5\ cm$ e massa $m = 5\ g$, è sospesa verticalmente al centro di un contenitore a forma di U, con pareti metalliche parallele, in connessione elettrica, distanti $c = 1\ cm$. Un opportuno dispositivo applica la forza $F$ necessaria per mantenere ferma la lamina. Il contenitore ha altezza $l = 10\ cm$, come in figura e il lato inferiore della lamina è ferma a un'altezza fissa $a = 2\ cm$ dalla base del contenitore. Tra il contenitore e la lamina è mantenuta una d.d.p. $V = 8\ kV$. Trascurando gli effetti di bordo si determinino:




a) la forza che il dispositivo deve applicare alla lamina quando il contenitore è vuoto,

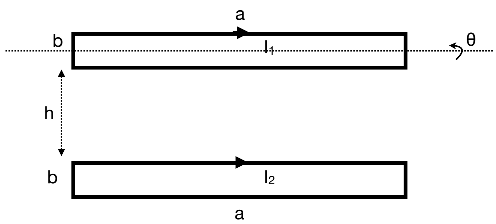
b) la forza applicata se, a parità di d.d.p., nel contenitore viene immesso un liquido di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 5$ fino ad un'altezza $h\,(h > 2\ cm)$,

c) il lavoro fatto dall'alimentatore tra le situazioni ai punti b) e a) in funzione dell'altezza del liquido.

d) si determini come varia in funzione dell'altezza $h$ del liquido la forza che il dispositivo deve applicare per mantenere ferma la lamina se, dopo aver stabilto la d.d.p. tra lamina e pareti del contenitore, e prima di introdurre il liquido, viene rimossa la connessione con l'alimentatore di tensione.

**Esercizio 2**

Si considerino i due circuiti rigidi rappresentati nella figura, costituiti da due spire rettangolari di resistenza $R = 10\ \Omega$ con un lato $a = 1\,\text{m}$ molto più lungo dell'altro ($a \gg b$) e poste a distanza $h = 10\ b = 10\,\text{cm}$. Inizialmente i due circuiti sono percorsi dalle correnti $I_1 = I_2 = 10$ A circolanti nello stesso verso e mantenute costanti da opportuni generatori di corrente. In tale configurazione determinare:




a) coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti;

b) le forze da applicare dall'esterno su i due circuiti per mantenerli fermi nella posizione in figura.

Supponendo ora che nel primo circuito non sia presente un generatore di corrente, ma che il circuito venga fatto ruotare intorno al proprio asse (vedi figura) da una coppia meccanica esterna $M_m$, mentre il secondo circuito rimane fermo sempre percorso dalla corrente costante $I_2$, determinare:

c) il coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti in funzione dell'angolo $\theta$ tra i versori normali ai due circuiti, nella approssimazione che i due circuiti siano molto distanti l'uno dall'altro ($h \gg b$);

d) la corrente indotta nel primo circuito in funzione del tempo;

e) il valore della coppia meccanica esterna da applicare per mantenere la spira a regime in rotazione con velocità angolare costante $\omega_0$.

*Facoltativo:*
f) provare a calcolare il coefficiente di mutua induzione del punto (c) senza assumere $h \gg b$, per esempio per $h = b$.

**Soluzione**
**Esercizio 1**
**a)** Trascurando gli effetti di bordo, la lamina tra le pareti del contenitore corrisponde al parallelo di due condensatori piani in aria. La capacità e l'energia elettrostatica del parallelo sono:

$$C_0 = \frac{4b(l-a)\epsilon_0}{c} \qquad\qquad U_0 = \frac{1}{2}\frac{4b(l-a)\epsilon_0}{c}V^2$$

La forza elettrostatica che risulta rivolta verso il basso è quindi:

$$F_{es} = \frac{dU_0}{da}|_{V\,cost} = -\frac{2b\epsilon_0}{c}V^2$$

Quindi:

$$F = mg + \frac{2b\epsilon_0}{c}V^2 = 54.7 \cdot 10^{-3}\ N$$

**b)** Quando è presente il liquido la lamina tra le pareti del contenitore corrisponde al parallelo formato dal parallelo di due condensatori piani in aria e dal parallelo di due condensatori piani col liquido tra le armature.
Le capacità dei due paralleli sono:

$$C_0' = \frac{4b(l-h)\epsilon_0}{c} \qquad\qquad C_{liq} = \frac{4b(h-a)\epsilon}{c}$$

la capacità totale:

$$C_{tot} = C_0' + C_{liq} = \frac{4b\epsilon_0}{c}\left[l - h + \epsilon_r(h-a)\right]$$

L'energia elettrostatica e la forza a questa associata diventano:

$$U_{tot} = \frac{1}{2}\frac{4b\epsilon_0}{c}\left[l - h + \epsilon_r(h-a)\right]V^2 \qquad\qquad F_{es}' = \frac{dU_{tot}}{da}|_{V\,cost} = -\frac{2b\epsilon}{c}V^2$$

Ne segue:

$$F = mg + \frac{2b\epsilon}{c}V^2 = 77.4 \cdot 10^{-3}\ N$$

**c)** Quando viene inserito il liquido il generatore deve portare a potenziale $V$ la differenza di carica:

$$\Delta Q = C_{tot}V - C_0 V = \frac{4b\epsilon_0}{c}\left[(\epsilon_r - 1)(h-a)\right]V$$

compiendo un lavoro:

$$L = V\Delta Q = \frac{4b\epsilon_0}{c}\left[(\epsilon_r - 1)(h-a)\right]V^2 = 2(U_{tot} - U_0)$$

pari al doppio della variazione di energia elettrostatica.

**d)** Se la connessione col generatore viene rimossa, sul sistema in aria a tensione $V$ è presente una carica:

$$Q_0 = C_0 V = \frac{4b(l-a)\epsilon_0}{c}V$$

che rimane sulla lamina. In questo caso l'energia elettrostatica del sistema in funzione dell'altezza $h$ del liquido è:

$$U(h) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_{tot}} = \frac{2b\epsilon_0(l-a)^2V^2}{c}\ \frac{1}{\left[\epsilon_r(h-a) + l - h\right]}$$

la forza elettrostatica:

$$F_{es}' = -\frac{dU}{da}|_{Q\,cost} = -\frac{2b\epsilon_0(l-a)^2V^2}{c}\ \frac{\epsilon_r}{\left[\epsilon_r(h-a) + l - h\right]^2}$$

e quindi:

$$F = mg + \frac{2b\epsilon_0(l-a)^2V^2}{c}\ \frac{\epsilon_r}{\left[\epsilon_r(h-a) + l - h\right]^2}$$

**Esercizio 2**

a)

Poichè $a \gg b$ possiamo trascurare il contributo dei tratti brevi di lunghezza $b$ nel calcolo del campo di induzione magnetica generato da uno dei due circuiti, approssimandolo quindi come dovuto alla sovrapposione del campo generato da due fili rettilinei paralleli posti a distanza $b$ percorsi dalla stessa corrente in senso inverso. Avremo per il campo $\mathbf{B}$ a distanza $x$ dal filo più interno di una delle due spire:

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+b})\hat{z};$$

avendo preso come asse $z$ la direzione perpendicolare al piano delle spire in verso uscente dal foglio. Il flusso concatenato con la prima spira sarà quindi dato da:

$$\begin{aligned} MI_2 &= \Phi_1(B_2) = \int \mathbf{B} \cdot \hat{n} dS = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\int_h^{h+b}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+b})a dx = \frac{\mu_0 I_2 a}{2\pi}(\ln\frac{h+b}{h} - \ln\frac{h+2b}{h+b}) = \frac{\mu_0 I_2 a}{2\pi}\ln\frac{121}{120} \\ M &= \frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{121}{120} = 0.14\, nH. \end{aligned}$$

b)

Ancora poichè $a \gg b$ possiamo trascurare il contributo dei tratti brevi nel calcolo delle forze scambiate tra i vari tratti dei circuiti percorsi da corrente. La forza tra due fili paralleli di lunghezza $a$ percorsi dalle correnti $I_1$ e $I_2$ e distanti $d$ è data dalla relazione:

$$F = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d};$$

e risulta attrattiva per correnti discordi e repulsiva per correnti concordi tra i due fili. Avremo quindi:

$$F = \frac{\mu_0 a}{2\pi} I_1 I_2 (-\frac{2}{b+h} + \frac{1}{2b+h} + \frac{1}{h}) = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{660b} = 3\,\mu N;$$

che risulta repulsiva. Dovremo quindi applicare dall'esterno una forza eguale e contraria per mantenere fermi in posizione in due circuiti.

Allo stesso risultato si arriva derivando l'energia di mutua interazione:

$$F = \frac{\partial}{\partial h}(M I_1 I_2)$$

c)

Procedendo come al punto (a), ma tenendo conto che il prodotto scalare $\mathbf{B} \cdot \hat{n}$ in questo caso dipende dall'angolo $\theta$ che la normale alla spira forma con l'asse $z$: $\cos\theta(t)$, avremo (nell'approsimazione $h \gg b$ possiamo considerare la spira come piccola):

$$M(\theta(t)) = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{121}{120}\cos\theta(t).$$

d)

Sulla spira rotante viene indotta una forxza elettromotrice data dalla legge di Faraday-Neumann pari a:

$$f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dMI_1}{dt} = -I_1\frac{dM(t)}{dt} = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{121}{120}\sin\theta(t)\omega(t).$$

ed una corrente:

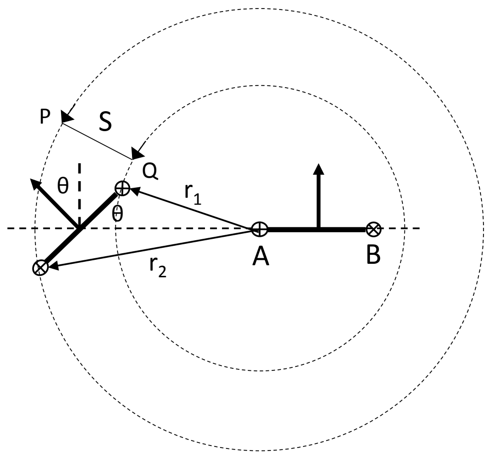
$$I_2(t) = \frac{\mu_0 a}{2\pi R}\ln\frac{4}{3}\sin\theta(t)\omega(t).$$

con $\theta(t) = \omega(t)t$.

e)
A regime la spira ruoterà con velocità angolare costante $\omega_0$. La potenza fornita dalla coppia esterna $M_m\omega_0$ dovrà fornire la potenza dissipata per effetto Joule nella resistenza della spira mobile, per cui:

$$M_m\omega_0 = RI_2(\infty)^2 \Rightarrow M_m = \frac{RI_2(\infty)^2}{\omega_0} = \frac{\mu_0^2 a^2}{4\pi^2 R}(\ln\frac{121}{120})^2\sin^2(\omega_0 t).$$

f)
Consideriamo il caso $h = b$. E' immediato estendere il calcolo al caso $h \neq b$.
Come è facile vedere in figura, per la simmetria cilindrica, le linee di forza circolari del campo $B$ associate alla corrente nel filo A, che attraversano l'altra bobina sono tutte quelle con distanza dal filo A compresa tra $r_1$ e $r_2$.
Il flusso di $B$ dal filo A concatenato con la spira si può calcolare prendendo una superficie $S$ con lati PQ e $a$ perpendicolare




alle linee di flusso:

$$\Phi_A(B) = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = -\int_{r_1}^{r_2} B_\varphi\,adr = -\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}dr \quad .$$

Dal teorema di Carnot:

$$r_1^2 = \left(\frac{3}{2}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}b\right)\left(\frac{1}{2}b\right)\cos\theta = b^2\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\cos\theta\right)$$

$$r_2^2 = \left(\frac{3}{2}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2}b\right)\left(\frac{1}{2}b\right)\cos\theta = b^2\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cos\theta\right)$$

e quindi:

$$\Phi_A(B) = -\frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\log\left(\frac{5+3\cos\theta}{5-3\cos\theta}\right)$$

Similmente per il flusso del campo associato alla corrente nel filo in B:

$$\Phi_B(B) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \log\left(\frac{13 + 5\cos\theta}{13 - 5\cos\theta}\right)$$

Il flusso concatenato con la spira è infine:

$$\Phi(B) = \Phi_A(B) + \Phi_A(B) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \log\left(\frac{13 + 5\cos\theta}{13 - 5\cos\theta} \cdot \frac{5 - 3\cos\theta}{5 + 3\cos\theta}\right)$$

$$\text{che per } \theta = 0 \ \text{ diventa:} \qquad \Phi(B) = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \log\frac{4}{3} \quad .$$