Prova Scritta Elettromagnetismo - 4.9.2017

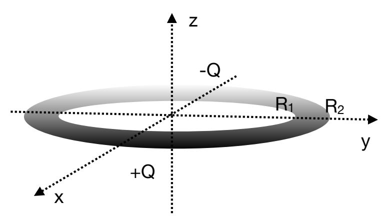
(a.a. 2016/17, S. Giagu/F. Lacava/S. Petrarca)

---

risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

Su una superficie costituita da una corona circolare di raggio interno $R_1 = 2\,\text{mm}$ e raggio esterno $R_2 = 4\,\text{mm}$ posta nel piano $z = 0$ è disposta uniformemente una carica elettrica $+Q$ (per $x > 0$) ed una carica $-Q$ (per $x < 0$) con $Q = 3\,\text{nC}$ (cfr. figura).



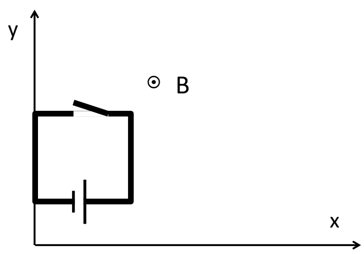
a) Calcolare il momento di dipolo elettrico del sistema.
b) Calcolare la posizione e il valore del massimo del modulo del campo elettrico generato dalla distribuzione di carica su una superficie sferica di raggio $R = 20\,\text{cm}$ centrata nell'origine.

Se la superficie viene immersa nel campo elettrico prodotto da un condensatore piano (ideale) le cui armature sono i piani $y = y_0 = 10\,\text{cm}$ mantenuto al potenziale $V = 1000\,\text{V}$, e $y = -y_0 = -10\,\text{cm}$ collegato a massa, determinare:

c) il momento della forza che agisce sulla corona circolare.

Esercizio 2

Una spira quadrata di lato $L = 50\ cm$, massa $m = 5\ g$ e di resistenza $R = 2\ \Omega$ è posta inizialmente ferma nel sistema di riferimento come in figura. Nella spira si trovano inseriti una batteria di f.e.m. $f = 20\ V$ e un interruttore che viene chiuso al tempo $t = 0$. Nel semispazio $x > 0$ è presente un campo di induzione magnetica $\vec{B} = B_0\hat{z}(1 + \alpha x)$ dove $B_0 = 1.2\ T$ e $\alpha = 0.1\ T/m$.
Considerando il moto della spira mentre è totalmente immersa nel campo magnetico, si scrivano:
a) le equazioni del moto della spira e della corrente nel circuito;
Si determini come variano in funzione del tempo dandone i valori al tempo $t = 0.5\ s$:
b) la velocità della spira;
c) la corrente nel circuito;
d) la potenza erogata dalla batteria;
e) la potenza meccanica trasferita alla spira,



Si trascuri l'autoinduzione del circuito e la forza peso.

Soluzione

Esercizio 1
a):

Il momento di dipolo elettrico del sistema è dato dall'espressione:

$$\vec{P} = \oint \sigma \vec{r'} dS.$$

Per la simmetria del sistema l'unica componente non nulla sarà la componente diretta lungo l'asse $\hat{x}$. Scegliendo il sistema di coordinate polari (r, ϕ) ed esprimendo l'elemento di superficie dS come $dS = rdrd\phi$, la proiezione di $\vec{P}$ sull'asse $\hat{x}$ risulta data da:

$$P_x = \oint \sigma x' dS = \int_{R_1}^{R_2} \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sigma r \cos\phi r dr d\phi - \int_{R_1}^{R_2} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sigma r \cos\phi r dr d\phi = \frac{4}{3}\sigma(R_2^3 - R_1^3) = 11.9\,10^{-12}\,\mathrm{Cm};$$

in cui $\sigma = \frac{2Q}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = 1.6\,10^{-4}\,\mathrm{C/m^2}$.

b):

Poichè $R \gg R_1, R_2$ il campo elettrico generato dal sistema a distanza R è quello di un dipolo di momento di dipolo elettrico $\vec{P} = P_x, 0, 0)$, quindi con potenziale in coordinate polari:

$$V(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\sin\theta\cos\phi}{r^2};$$

da cui:

$$\begin{aligned}
E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{P_X}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\sin\theta\cos\phi}{r^3}; \\
E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{P_X}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta\cos\phi}{r^3}; \\
E_\phi &= -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{P_X}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sin\phi}{r^3};
\end{aligned}$$

con modulo:

$$E(r,\theta,\phi) = \frac{P_X}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sqrt{4\sin^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\phi}}{r^3} = \frac{P_X}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sqrt{3\sin^2\theta\cos^2\phi + 1}}{r^3};$$

che presneta un massimo sulla sfera di raggio R per $\theta = \pm\pi/2$ e $\phi = 0, \pi$ quindi su i due punti posti sull'asse $\hat{x}$ del dipolo:

$$E_{max} = \frac{P_X}{2\pi\epsilon_0 R^3} = 13.4\,\mathrm{V/m}.$$

c):

Ancora approssimando la corona circolare come un dipolo elettrico di momento $\vec{P} = P_x, 0, 0)$, questo risulterà immerso in un campo elettrostatico uniforme $\vec{E}_0$:

$$\vec{E}_0 = (0, -V/2y_0, 0);$$

e risentirà di conseguenza di un momento meccanico:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{P} \times \vec{E}_0 = P_X E_0 \hat{z} = -\frac{V P_X}{2y_0} \hat{z}; \\ |\vec{M}| &= 3.0\,10^{-8}\,\mathrm{Nm}; \end{aligned}$$

che tenderà a far ruotare il dipolo intorno all'asse $\hat{z}$ in verso orario.

Esercizio 2

a):

Individuando con x la posizione dello lato a sinistra, quando nel circuito scorre una corrente sui lati paralleli all'asse y agiscono due forze opposte con direzione x e aventi risultante:

$$F_x = iL[B(x+L) - B(x)] = iLB_0[1 + \alpha(x+L) - 1 - \alpha x] = iL^2 B_0 \alpha$$

E' immediato vedere che le forze agenti sui lati paralleli all'asse y sono uguali ed opposte.
Il flusso del campo B concatenato col circuito è:

$$\Phi(x) = L \int_x^{x+L} B(x)dx = LB_0 \int_x^{x+L} (1+\alpha x)dx = LB_0 \; [L + \frac{\alpha}{2}L^2 + \alpha L x]$$

Nel circuito è presente una forza elettromotrice indotta:

$$f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -L^2 B_0 \alpha \frac{dx}{dt} = -L^2 B_0 \alpha \; v$$

Le equazioni del circuito e della spira sono:

$$f + f_i = f - L^2 B_0 \alpha \; v = Ri \qquad\qquad m\frac{dv}{dt} = iL^2 B_0 \alpha$$

Sostituendo la prima nella seconda si ottiene:

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{L^2 B_0 \alpha}{R} \left[f - L^2 B_0 \alpha v\right]$$

che si può scrivere:

$$\frac{dv}{dt} = \beta - \gamma v \qquad \beta = \frac{L^2 B_0 \alpha}{mR} f \qquad \gamma = \frac{L^4 B_0^2 \alpha^2}{mR}$$

b):

Integrando si trova: per la velocità:

$$v(t) = \frac{\beta}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) \qquad v(t) = \frac{f}{L^2 B_0 \alpha}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) \qquad v(t = 0.5\ s) = 29.3\ m/s$$

c):

e per la corrente:

$$i(t) = \frac{f}{R} e^{-\gamma t} \qquad i(t = 0.5\ s) = 9.6\ A$$

d):

La potenza erogata dalla batteria è:

$$W_b = fi = \frac{f^2}{R} e^{-\gamma t} \qquad W_b(t = 0.5\ s) = 191.2\ W$$

e):

mentre la potenza meccanica trasferita alla spira è:

$$W_m = F_x v = \frac{dE_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{f^2}{R}\left(e^{-\gamma t} - e^{-2\gamma t}\right)$$

$$W_m(t = 0.5\ s) = 8.4\ W$$