Prova Scritta Elettromagnetismo - 30.10.2017

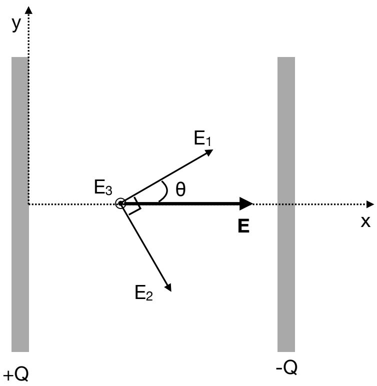
(a.a. 2016/17, S. Giagu/F. Lacava/S. Petrarca)

---

risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

Un condensatore a facce piane e parallele è costituito da due piani conduttori paralleli di grande area S posti ad una distanza h uno dall'altro. Sulle due armature è distribuita una carica $\pm Q$ in modo uniforme, mentre lo spazio tra le due armature è riempito da un mezzo dielettrico omogeneo ma anisotropo. Il tensore dielettrico del mezzo $||\epsilon||$ collega il vettore spostamento elettrico e il vettore campo elettrico tramite la relazione:



$$D_i = \sum_{j=1}^{3} \epsilon_{ij} E_j;$$

in cui D_i e E_i rappresentano le componenti i-esime dei vettori $\mathbf{D} = (D_1, D_2, D_3)$ e $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ rispettivamente. $||\epsilon||$ risulta diagonale ($\epsilon_{ij} = \delta_{ij}\epsilon_i$) nel sistema di riferimento (vedi figura) in cui l'asse 1 giace nel piano della figura ed è inclinato di un angolo θ rispetto all'asse orizzontale x, l'asse 2 giace anche esso nel piano della figura e forma un angolo $\pi/2$ rispetto all'asse 1, mentre l'asse 3 è perpendicolare al piano della figura con verso uscente.

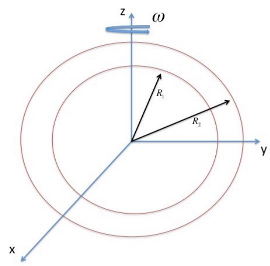
Assumendo trascurabili possibili effetti di bordo ($\sqrt{S} \gg h$), determinare:

a) le componenti orizzontali (x) e verticali (y) dei vettori campo elettrico $\mathbf{E}$ e spostamento elettrico $\mathbf{D}$ nel dielettrico;
b) calcolare la capacità elettrica del condensatore.

[*Dati:* ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, S, h, θ, Q]

Esercizio 2

Un sistema è composto da due sfere isolanti cave, concentriche, di spessore trascurabile che ruotano (nello stesso verso) rispetto a un asse (asse z della fig) coincidente con un loro diametro con velocità angolare costante $\omega = 10s^{-1}$. La sfera interna ha raggio $R_1 = 20$cm, quella esterna $R_2 = 21$cm. Sulle sfere è distribuita uniformemente una carica elettrica: la sfera esterna ha carica $+Q$ mentre la sfera interna carica $-Q$; inoltre la differenza di potenziale ΔV tra le due sfere è $\Delta V = 3$kV.



a) Calcolare il valore della carica elettrica presente sulle sfere.
b) Calcolare, in modulo, direzione e verso, il momento di dipolo magnetico totale delle due sfere rotanti. (Scegliete il sistema di riferimento di assi fisso nel laboratorio con origine nel centro delle sfere).
c) Calcolare il valore del campo di induzione magnetica al centro del sistema.
d) Calcolare, utilizzando l ' approssimazione di dipolo, il campo di induzione magnetica B nel punto dell' asse z: $P_1 = (0, 0, z_0)$ con $z_0 = 2R_1$.

Soluzione
Esercizio 1

a)
Poiché all'interno delle armature $E = 0$ e la componente tangenziale di E si conserva nel passaggio tra i due mezzi, risulta nel dielettrico $\mathbf{E} = E\hat{x}$.

Le componenti di $\mathbf{E}$ nel sistema di riferimento in cui $||\epsilon||$ è diagonale risultano quindi date da:

$$\begin{aligned} E_1 &= E\cos\theta; \\ E_2 &= E\sin\theta; \\ E_3 &= 0. \end{aligned}$$

In tale sistema le componenti di $\mathbf{D}$ sono date da:

$$\begin{aligned} D_1 &= \epsilon_1 E_1 = \epsilon_1 E\cos\theta; \\ D_2 &= \epsilon_2 E_2 = \epsilon_2 E\sin\theta; \\ D_3 &= 0. \end{aligned}$$

Applicando il teorema di Coulomb per il vettore spostamento elettrico vicino alle armature del condensatore avremo: $\mathbf{D} = D\hat{x} = \sigma = Q/S =$ costante, da cui:

$$\begin{aligned} D &= \frac{Q}{S} = D_1\cos\theta + D_2\sin\theta = \epsilon_1 E\cos^2\theta + \epsilon_2 E\sin^2\theta \rightarrow \\ E &= \frac{Q}{S}\frac{1}{\epsilon_1\cos^2\theta + \epsilon_2\sin^2\theta}. \end{aligned}$$

Per cui:

$$\begin{aligned} E_x &= E = \frac{Q}{S}\frac{1}{\epsilon_1\cos^2\theta + \epsilon_2\sin^2\theta}; \\ E_y &= 0; \\ D_x &= \frac{Q}{S}; \\ D_y &= D_1\sin\theta - D_2\cos\theta = \frac{Q}{S}\frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)\sin\theta\cos\theta}{\epsilon_1\cos^2\theta + \epsilon_2\sin^2\theta}. \end{aligned}$$

Soluzione
Esercizio 1

a)
Poiché all'interno delle armature $E = 0$ e la componente tangenziale di E si conserva nel passaggio tra i due mezzi, risulta nel dielettrico $\mathbf{E} = E\hat{x}$.

Le componenti di $\mathbf{E}$ nel sistema di riferimento in cui $||\epsilon||$ è diagonale risultano quindi date da:

$$\begin{aligned} E_1 &= E\cos\theta; \\ E_2 &= E\sin\theta; \\ E_3 &= 0. \end{aligned}$$

In tale sistema le componenti di $\mathbf{D}$ sono date da:

$$\begin{aligned} D_1 &= \epsilon_1 E_1 = \epsilon_1 E\cos\theta; \\ D_2 &= \epsilon_2 E_2 = \epsilon_2 E\sin\theta; \\ D_3 &= 0. \end{aligned}$$

Applicando il teorema di Coulomb per il vettore spostamento elettrico vicino alle armature del condensatore avremo: $\mathbf{D} = D\hat{x} = \sigma = Q/S =$ costante, da cui:

$$\begin{aligned} D &= \frac{Q}{S} = D_1\cos\theta + D_2\sin\theta = \epsilon_1 E\cos^2\theta + \epsilon_2 E\sin^2\theta \rightarrow \\ E &= \frac{Q}{S}\frac{1}{\epsilon_1\cos^2\theta + \epsilon_2\sin^2\theta}. \end{aligned}$$

Per cui:

$$\begin{aligned} E_x &= E = \frac{Q}{S}\frac{1}{\epsilon_1\cos^2\theta + \epsilon_2\sin^2\theta}; \\ E_y &= 0; \\ D_x &= \frac{Q}{S}; \\ D_y &= D_1\sin\theta - D_2\cos\theta = \frac{Q}{S}\frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)\sin\theta\cos\theta}{\epsilon_1\cos^2\theta + \epsilon_2\sin^2\theta}. \end{aligned}$$

b)

Dalla definizione di capacità elettrica: $C = Q/\Delta V$ con:

$$\Delta V = \int \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = \int E dx = \frac{Q}{S}\frac{h}{\epsilon_1\cos^2\theta + \epsilon_2\sin^2\theta};$$

da cui:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{S(\epsilon_1\cos^2\theta + \epsilon_2\sin^2\theta)}{h}.$$

Soluzione
Esercizio 2

a) La differenza di potenziale tra le due sfere è data da $|\Delta V| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2)}$; quindi $Q = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R1}|\Delta V| = 1.4 \cdot 10^{-6}$ C .
b) Il modulo del momento di dipolo magnetico m di una sfera uniformemente carica ruotante rispetto a un suo diametro è dato da (1): $m(R) = \frac{4\pi}{3}\sigma\omega R^4 = \frac{Q}{3}\omega R^2$, essendo $Q = 4\pi\sigma R^2$. Per cui il modulo del momento di dipolo del sistema è $m = \frac{Q}{3}\omega(R_2^2 - R_1^2) = 19\ 10^{-19}$ A m^2; il momento di dipolo è diretto lungo l'asse z nel verso positivo.
c) Il modulo del campo di induzione magnetica nel centro della sfera carica ruotante è dato da (2) $B(R) = 2/3\mu_0\omega\sigma R$. Per cui il modulo del campo di induzione magnetica nel centro del sistema è: $B = \frac{Q\mu_0\omega}{6\pi}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$= 2.2 10^{-13} T ; il campo di induzione magnetica è diretto lungo l'asse z nel verso negativo perchè prevale il contributo della sfera interna carica negativamente.
d) Il campo di induzione magnetica generato a grande distanza lungo l'asse z da un momento di dipolo magnetico posto nell'origine e allineato con l'asse z è dato da $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mathbf{m}}{z_0^3}$, per cui $B = \frac{\mu_0}{6\pi z_0^3}Q\omega(R_2^2 - R_1^2)$= 6 10^{-14} T , questo campo è allineato lungo il verso positivo dell'asse z.

(1) Per il calcolo si consideri una calotta sferica infinitesima a cui corrisponde una carica $dq = \sigma 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$ e una corrente $di = dq/T = \omega\sigma R^2 \sin\theta d\theta$. Questa calotta è assimilata a una spira infinitesima percorsa dalla corrente di che circoscrive un' area $\Sigma = \pi R^2 \sin\theta^2$. Per il teorema di Ampere a questa spira corrisponde un momento di dipolo magnetico infinitesimo $dm = \Sigma di = \pi\sigma\omega R^4 \sin^3\theta d\theta$ che integrato porta $m = \frac{4}{3}\omega\sigma\pi R^4 = \frac{1}{3}\omega Q R^2$ (essendo $\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = 4/3$).

(2) Il modulo del campo di induzione magnetica generato da una spira di raggio r percorsa da una corrente I lungo l'asse è dato da $B = \frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2+z^2)^{3/2}}$. Per la nostra geometria $r = R\sin\theta$ e $I -> di = \omega\sigma R^2 \sin\theta d\theta = \omega\sigma R r d\theta$ quindi, essendo $\frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\sin^3\theta}{r}$ si ha $dB = \frac{\mu_0 r^2 di}{2(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2}\omega\sigma R \sin^3\theta d\theta$. Integrando si ottiene : $B = \frac{2\mu_0}{3}\omega\sigma R$.