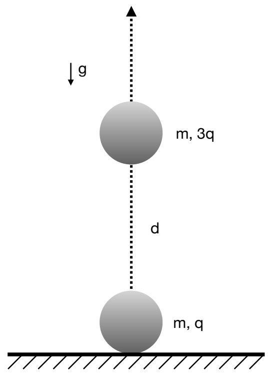
**Prova Scritta di Elettromagnetismo - 9.2.2018**

*(A.A. 2016/17, Prof. S.Giagu, F.Lacava, F.Piacentini)*

## Esercizio 1

Due sferette di eguale massa $m = 2\,\text{g}$ di materiale dielettrico sono vincolate a scorrere senza attrito lungo lo stesso asse in direzione verticale (vedi figura). Una delle sfere è inizialmente posta sul suolo ed è carica elettricamente con una carica $q$. La seconda sfera possiede una carica $3q$ e si trova sospesa ad una distanza $d = 20\,\text{cm}$ sopra la prima sfera in situazione di equilibrio.




a) trattando le sferette come puntiformi, determinare l'espressione della carica $q$ in funzione dei dati del problema e calcolarne il valore numerico.

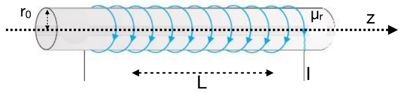
Se la sfera superiore viene bloccata nella posizione ad altezza $d$ dal suolo, mentre la prima sfera viene lanciata verso l'alto con velocità iniziale $v_i = 4\,\text{m/s}$:

b) determinare la minima distanza alla quale la prima sfera riesce ad avvicinarsi alla seconda sfera.

c) calcolare come varia il risultato della domanda (b) se l'ambiente è riempito da un gas dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4$.

## Esercizio 2

Un solenoide molto lungo, con sezione circolare costante di raggio $r_0 = 1.5$ cm, ha un avvolgimento di 12 spire/cm distribuito uniformemente su tutta la sua lunghezza. L'interno del solenoide è riempito con un materiale paramagnetico lineare non omogeneo con $\mu_r = (1 + r/r_0)$ con $r$ distanza dall'asse del solenoide (asse $z$).




Assumendo che le spire del solenoide siano percorse da una corrente costante $I = 2\text{A}$, e considerando ideale il solenoide (trascurando gli effetti di bordo), determinare:

a) i campi $\mathbf{H}$, e $\mathbf{B}$ all'interno del solenoide come funzioni di $r$;

b) il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza del solenoide;

c) le densità di corrente amperiane superficiali e volumiche che compaiono internamente e sulla superficie laterale del paramagnete;

d) le correnti amperiane di superficie e volumiche per unità di lunghezza del solenoide.

**Soluzione 1**

a)
All'equilibrio la forza elettrostatica repulsiva tra le due sferette controbilancia la forza peso agente sulla sferetta superiore, per cui:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3q^2}{d^2} = mg \Rightarrow q = d\sqrt{\frac{mg4\pi\epsilon_0}{3}} = 170\,nC$$

b)
La minima distanza viene raggiunta quando la la velocità della prima sfera si annulla. In presenza di sole forze conservative possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia per cui, indicando con $d'$ la distanza minima tra le due sferette e utilizzanod l'espressione di $q$ dalla risposta precedente, avremo:

$$\begin{aligned}
K(i) + U_e(i) + U_g(i) &= K(f) + U_e(f) + U_g(f) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 d} + mgd = \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 d'} + mgd + mg(d-d') \Rightarrow \\
\frac{v_i^2}{2g} &= \frac{d^2}{d'} - d' \Rightarrow 2gd'^2 + d'v_i^2 - 2gd^2 = 0 \Rightarrow \\
d' &= \frac{-v_i^2 \pm \sqrt{v_i^4 + 16g^2d^2}}{4g} = 4.6\,cm
\end{aligned}$$

c)
Se lo spazio é riempito da un gas dielettrico a partitá di carica calcolata nel punto (a) l'unica cosa che cambierà sarà l'energia elettrostatica tra le due cariche che diminuirà di un fattore $\epsilon_r$. Procedendo come per la risposta (b) avremo quindi:

$$\begin{aligned}
K(i) + U_e(i) + U_g(i) &= K(f) + U_e(f) + U_g(f) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r d} + mgd = \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r d'} + mgd + mg(d-d') \Rightarrow \\
\frac{v_i^2}{2g} &= \frac{d^2}{d'\epsilon_r} - d' + d(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \Rightarrow 2g\epsilon_r d'^2 + d'(v_i^2 - d(\epsilon_r - 1)2g) - 2gd^2 = 0 \Rightarrow \\
d' &= \frac{-(v_i^2 - d(\epsilon_r - 1)2g) \pm \sqrt{(v_i^2 - d(\epsilon_r - 1)2g)^2 + 16g^2d^2\epsilon_r}}{4g\epsilon_r} = 7.7\,cm
\end{aligned}$$

**Soluzione 2**

a)
Applicando il teorema della circuitazione di Ampere per il campo magnetico $bfH$ e la relazione che lega campo magnetico e campo di induzione magnetica in un materiale lineare:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= nI\hat{z};\\ \mathbf{B} &= \mu_0\mu_r\mathbf{H} = \mu_0(1+\frac{r}{r_0})nI\hat{z}.\end{aligned}$$

b)
Il flusso di B attraverso n spire per unità di lunghezza del solenoide è dato da:

$$\phi = \int_0^{r_0} nB2\pi r dr = \frac{5}{6}\mu_0 n^2 2\pi r_0^2 I \Rightarrow L = \frac{\phi}{I} = \frac{5}{6}\mu_0 n^2 2\pi r_0^2.$$

c)
Il vettore magnetizzazione è dato da $\mathbf{M} = \chi_m\mathbf{H} = \frac{r}{r_0}nI\hat{z}$, per cui, utilizzando l'espressione del rotore in coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_s &= \mathbf{M}\times\hat{n} = M(r_0)\hat{\phi} = nI;\\ \mathbf{J}_v &= \nabla\times\mathbf{M} = -\frac{\partial M_z}{\partial r}\hat{\phi} = -\frac{nI}{r_0}\hat{\phi}.\end{aligned}$$

le due correnti scorrono intorno all'asse del solenoide in verso concorde e discorde rispettivamente rispetto alla corrente I.

d)
considerando un tratto di lunghezza $L$ di solenoide la corrente amperiana di superficie è data da:

$$I_s = J_s L = nIL;$$

quella di volume dal flusso di $\mathbf{J}_v$ attraverso la superficie rettangolare con due lati di lunghezza $L$ paralleli all'asse del solenoide (uno a a distanza $r = 0$ dall'asse del solenoide e uno a distanza $r = r_0$):

$$I_v = J_v L r_0 = -nIL = -I_s.$$