Prova scritta di Elettromagnetismo A.A. 2017/2018
13 Aprile 2018
(Proff. S. Giagu, F. Lacava, F. Piacentini)

- Tempo a disposizione: 2h

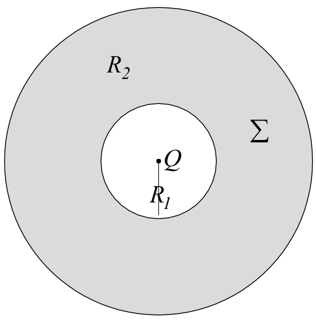
Problema 1

Una carica puntiforme $Q = 4\ 10^{-8}$ C viene posta al centro di uno strato sferico di raggio interno $R_1 = 10$ cm ed esterno $R_2 = 20$ cm composto da materiale dielettrico omogeneo ed isotropo di costante dielettrica $\varepsilon_r = 4$.
Determinare:

a) l'espressione del campo elettrico in funzione della distanza radiale dalla carica puntiforme;

b) il valore delle cariche di polarizzazione sulle due facce del dielettrico;

c) il lavoro compiuto per portare la carica Q all'infinito.



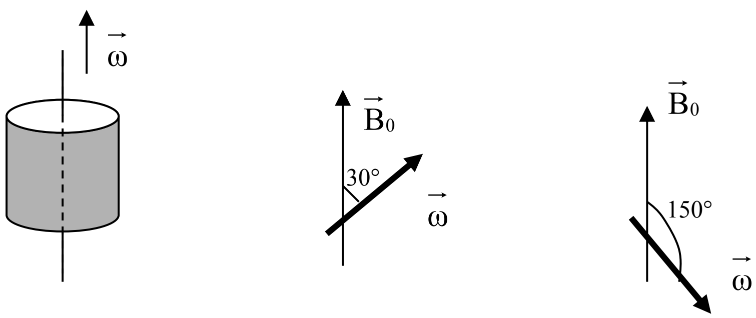
Problema 2

Sulla superficie laterale di un cilindro isolante di massa $m_c = 10$ g e di raggio r = 1 cm, e' uniformemente distribuita una carica q = 2 10^{-6} C. Il cilindro ruota intorno al proprio asse con velocità angolare $\omega = 1000$ giri/s .

a) Si determini il momento di dipolo magnetico del cilindro;

b) si descriva il moto seguito dal cilindro ruotante se esso è posto in un campo B_0= 3 Tesla con l'asse a formare un angolo di 30° rispetto al campo;

c) infine si determini la variazione di energia del cilindro ruotante se mediante una opportuna interazione il suo asse viene portato a formare un angolo di 150° con il campo B_0.



Soluzione Problema 1

a) Dal teorema di Gauss per il campo induzione dielettrica $\Phi(\mathbf{D}) = Q$, si ha, considerando superfici sferiche di raggio r centrate nella carica Q: $D = Q/(4\pi r^2)$. Dalla relazione $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon$, si ottiene

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad \text{per } \; r < R_1 \quad (\text{nel vuoto})$$
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \qquad \text{per } \; R_1 \le r \le R_2 \quad (\text{nel dielettrico})$$
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad \text{per } \; r > R_2 \quad (\text{nel vuoto})$$

b) La densità di carica di polarizzazione si ottiene dalla relazione $\sigma_p = \mathbf{P}\cdot\mathbf{n}$, con $\mathbf{n}$ normale uscente dalla superficie del dielettrico e $\mathbf{P} = \epsilon_0\chi\mathbf{E} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$ vettore di polarizzazione. Quindi sulle superfici interna ed esterna del dielettrico si ha rispettivamente

$$\sigma_p(R_1) = -|\mathbf{P}(R_1)| = -\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\; E(R_1) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{Q}{4\pi R_1^2}$$
$$\sigma_p(R_2) = +|\mathbf{P}(R_2)| = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\; E(R_2) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

avendo tenuto conto del verso di $\mathbf{n}$ rispetto a $\mathbf{P}$. Le cariche di polarizzazione sulle superfici valgono pertanto:

$$Q_p(R_1) = 4\pi R_1^2\sigma_p(R_1) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}Q = \; -3\cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}$$
$$Q_p(R_2) = 4\pi R_2^2\sigma_p(R_1) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}Q = -Q(R_1) = \; 3\cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}$$

c) Il lavoro per portare la carica Q all'infinito è dato dalla differenza di energia elettrostatica del sistema tra la configurazione finale (carica all'infinito) e quella iniziale (carica al centro dello strato dielettrico) $\mathcal{L} = U_\infty - U_0$. Scrivendo la densità di energia elettrostatica nella forma $u = D^2/2\epsilon$ (con ϵ=ϵ_0 nel vuoto e ϵ=$\epsilon_0\epsilon_r$ nel dielettrico) si ottiene nel caso di separazione infinita tra carica e dielettrico

$$U_\infty = \int dV \frac{D^2}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\int_0^\infty \frac{dr}{r^2}\ ,$$

mentre nella situazione di carica al centro dello strato dielettrico

$$U_0 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left[\int_0^{R_1}\frac{dr}{r^2} + \frac{1}{\epsilon_r}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} + \int_{R_2}^{\infty}\frac{dr}{r^2}\right] = U_\infty - \frac{Q^2(\epsilon_r - 1)}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}\ .$$

Si ottiene quindi per il lavoro:

$$\mathcal{L} = \frac{Q^2(\epsilon_r - 1)}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2(\epsilon_r - 1)}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r}\ \frac{R_2 - R_1}{R_1R_2} \simeq \; 2.7\cdot 10^{-5}\ \mathrm{J}$$

Si noti che entrambe le energie U_0 e U_∞ hanno valore infinito (dovuto ai contributi divergenti dei campi calcolati al centro della carica), ma nella differenza tali divergenze si eliminano dando un risultato finito.

Soluzione Problema 2

a) Considerato un anello di lato dl sulla superficie laterale del cilindro, la carica su un elemento di area $dS = r\, d\varphi\, dl$ è $dq = \sigma\, r\, d\varphi\, dl$ e la corrente nell'anello è $di = \frac{dq}{dt} = \sigma\, r\, \frac{d\varphi}{dt} dl = \sigma\, r\, \omega\, dl$.

Il momento di dipolo magnetico associato è: $dm = \pi\, r^2 di = \pi\, r^2 \sigma\, r\, \omega\, dl$.

Integrando su tutta la superficie laterale del cilindro si ottiene:

$$\vec{m} = \pi r^2 \sigma\, r\, l\, \vec{\omega} = \frac{q\, r^2 \vec{\omega}}{2} = 6{,}28 \cdot 10^{-7}\ \text{A} \cdot \text{m}^2 .$$

b) Il momento di dipolo ha la stessa direzione del momento angolare di rotazione intorno all'asse del cilindro e si può scrivere: $\vec{m} = \frac{q\, r^2}{2I} I\, \vec{\omega} = \frac{q}{m_C} \vec{L}$.

Il dipolo magnetico posto in un campo B_0 uniforme non è soggetto a forze. Su di esso agisce però un momento: $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}_0$.

Ne segue: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}_0 = \frac{q}{m_C} \vec{L} \times \vec{B}_0 = -\frac{q}{m_C} \vec{B}_0 \times \vec{L} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$

E quindi l'asse del cilindro precede intorno al campo B_0 con una velocità angolare di precessione: $\vec{\Omega} = -\frac{q}{m_C} \vec{B}_0$.

c) Spostando l'asse da 30° a 150° si ha ancora un moto di precessione con stessa $\vec{\Omega}$. Cambia solo l'energia potenziale del dipolo: $U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$. Ne segue:

$$\Delta U_m = -\, m\, B_0 \cos 150° + m\, B_0 \cos 30° = 3{,}36 \cdot 10^{-6}\ \text{J}$$