

**Prova Scritta Elettromagnetismo - 21.6.2018**  
(a.a. 2017/18, S. Giagu/F. Lacava/F. Piacentini)

recupero primo esonero: risolvere l'esercizio 1: tempo massimo 1.5 ore.  
recupero secondo esonero: risolvere l'esercizio 2: tempo massimo 1.5 ore.  
intero scritto: risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

### Esercizio 1

Un sistema è formato da una piccola barretta isolante di lunghezza  $d_0$  e massa  $m = 1.0\text{ g}$ . La barretta è caricata elettricamente in modo uniforme con una carica  $q = 18.0 \cdot 10^{-6}\text{ C}$ . Il sistema si trova in aria appeso tramite un filo inestensibile e isolante di lunghezza  $l$  ad un punto  $O$  di un piano verticale sottile e infinitamente esteso, con l'asse della barretta perpendicolare al piano (vedi figura).

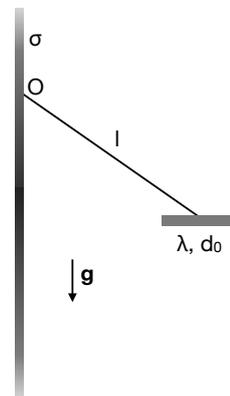
Se il piano è isolante e carico con una densità di carica uniforme  $\sigma > 0$ , tale da mantenere la barretta in equilibrio ad una data distanza dal piano, calcolare:

a) la densità di carica  $\sigma$  del piano e l'angolo formato dal filo rispetto al piano sapendo che il modulo della tensione del filo è  $T = 1.1 \cdot 10^{-2}\text{ N}$ .

b) dire di quanto bisogna variare la massa della barretta per mantenerla alla stessa distanza di equilibrio del piano, qualora la barretta fosse immerso in un liquido dielettrico di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r = 10$ . Se invece il piano è un conduttore collegato a terra:

c) determinare l'espressione del momento risultante delle forze agenti sulla barretta rispetto al polo  $O$  in funzione della distanza  $x$  dal piano;

d) determinare l'espressione della distribuzione di densità di carica  $\sigma$  e calcolare il valore della carica elettrica totale indotta sul piano conduttore.



### Esercizio 2

Un induttore di forma cilindrica, di lunghezza  $l = 50\text{ cm}$  e raggio esterno  $c = 8\text{ cm}$  è composto da due solenoidi coassiali. Al suo interno il materiale cambia con la distanza radiale dall'asse: per  $r < b$ , con  $b = 4\text{ cm}$ , è presente un materiale paramagnetico per il quale si può assumere una permeabilità magnetica relativa  $\mu_r = 1$ , mentre per  $r > b$  è presente un materiale ferromagnetico con  $\mu_r = 200$ .

Sulla superficie esterna del cilindro sono avvolte le spire del primo solenoide, con densità  $n = 1000/m$ , mentre un secondo solenoide di raggio  $a = 3\text{ cm}$ , coassiale al primo e con stessa densità di spire, è immerso nel materiale paramagnetico. I due solenoidi sono connessi in serie ad una estremità del cilindro e percorsi dalla stessa corrente di regime  $i = 6\text{ A}$ , ma con verso antiorario nel solenoide esterno e opposto in quello interno.

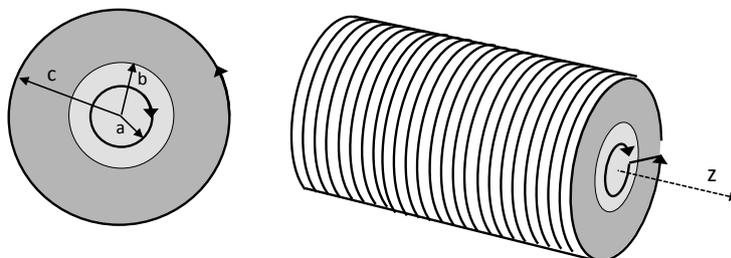
- Nell'approssimazione di solenoide di lunghezza infinita si calcolino:

- campi  $H$ ,  $B$ ,  $M$  in funzione della distanza  $r$  dall'asse del solenoide,
- le densità di corrente amperiane e le correnti amperiane presenti nel materiale ferromagnetico,
- il coefficiente di autoinduzione del sistema.

- Si determini inoltre:

d) come varia il flusso del vettore di Poynting in funzione del tempo a due distanze  $r$  dall'asse, per  $a < r < b$  e per  $b < r < c$ , se la corrente varia con legge  $i = i_0(1 - e^{-t/\tau})$ , con  $\tau$  nota, dopo che l'induttore è connesso a una f.e.m. costante.

(Non compreso nel compito: si osservi e si commenti come varia il flusso del vettore di Poynting in funzione di  $r$  e si metta in relazione con l'energia magnetica nell'induttore.)



**Soluzione**  
**Esercizio 1**

a)

Definendo un sistema di riferimento  $(x, y, z)$  con asse  $x$  perpendicolare al piano diretto nel verso dal piano alla barretta, e asse  $y$  parallelo al piano diretto verso l'alto, sulla barretta agisce la tensione  $\mathbf{T} = -T_x \hat{x} + T_y \hat{y}$  diretta lungo la direzione del filo, la forza peso  $m\mathbf{g} = -mg\hat{y}$  diretta parallelamente al piano e la forza elettrostatica  $q\mathbf{E} = qE\hat{x}$ , con  $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ . Proiettando lungo le componenti  $x, y$  avremo:

$$\begin{aligned} -T_x + qE &= 0 \rightarrow T_x^2 = (qE)^2; \\ T_y - mg &= 0 \rightarrow T_y^2 = (mg)^2; \\ T^2 &= \left(q\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right)^2 + (mg)^2; \\ \sigma &= \frac{2\epsilon_0}{q} \sqrt{T^2 - (mg)^2} = 4.9 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2; \\ \tan(\theta) &= \frac{T_x}{T_y} = \frac{qE}{mg} = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0 mg} = \sqrt{\left(\frac{T}{mg}\right)^2 - 1} \rightarrow \theta = 26.9^\circ. \end{aligned}$$

b)

In presenza di un dielettrico, il campo  $\mathbf{E}$  risulta ridotto di un fattore  $\epsilon_r$ , di conseguenza per mantenere lo stesso punto di equilibrio (stesso angolo  $\theta$ ) la massa deve ridursi dello stesso fattore  $m' = m/\epsilon_r = 0.1 \text{ g}$ .

c)

Possiamo risolvere il quesito applicando il metodo della carica immagine. La forza esercitata dal piano conduttore sulla barretta sarà equivalente alla forza esercitata da una barretta immagine di carica  $(-q)$  identica alla barretta reale posta simmetricamente rispetto al piano conduttore nel piano  $x < 0$ .

Indicando con  $x_0$  la distanza della barretta dal piano, e con  $\lambda = q/d_0$  la densità lineare di carica della barretta, il campo elettrico generato dalla barretta immagine su i punti dell'asse  $x$  è diretto lungo l'asse  $x$  ed è dato da:

$$\mathbf{E}_{-\lambda}(x) = \hat{x} \int_{x_0}^{x_0+d_0} \frac{-\lambda dx'}{(x-x')^2} = \hat{x} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-1}{(x_0+x)} + \frac{1}{(x_0+x+d_0)} \right);$$

la forza elettrostatica risultante sulla barretta reale è quindi data da:

$$\mathbf{F}_E(x) = \hat{x} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-d_0-x_0}^{-x_0} \lambda E_{-\lambda}(x') dx' = \hat{x} \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{-d_0-x_0}^{-x_0} dx' \left( \frac{1}{(x_0+d_0+x')} - \frac{1}{(x_0+x')} \right) = \hat{x} \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{1 + \frac{d_0}{x_0}}{(1 + \frac{d_0}{2x_0})^2} \right) < 0;$$

e quindi:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_p + \mathbf{M}_E = -mgl \sin \theta \hat{z} - F_E l \sin \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) \hat{z} = -l(mg \sin \theta + F_E \cos \theta) \hat{z}.$$

d)

Il campo elettrico in ciascun punto del semi-spazio  $x > 0$  è dato dalla somma vettoriale dei campi dovuti alla barretta reale e a quella immagine. Sul piano  $x = 0$  il campo elettrico ha componenti  $y$  e  $z$  nulle, mentre la componente  $x$  (ortogonale al piano) è pari a due volte il contributo dell'asticella reale. Avremo quindi:

$$\mathbf{E}_{tot}(0, y, z) = \hat{x} \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_0}^{x_0+d_0} \frac{\lambda(-x')dx'}{((x')^2 + R^2)^{3/2}} = \hat{x} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{((x_0 + d_0)^2 + R^2)^{1/2}} - \frac{1}{(x_0^2 + R^2)^{1/2}} \right);$$

avendo indicato con  $R^2 = y^2 + z^2$  la distanza al quadrato del punto sul piano dall'origine. Per il teorema di Coulomb avremo infine:

$$\sigma(R) = \epsilon_0 E_{tot}(0, R) = \frac{\lambda}{2\pi} \left( \frac{1}{((x_0 + d_0)^2 + R^2)^{1/2}} - \frac{1}{(x_0^2 + R^2)^{1/2}} \right).$$

Il piano si trova in configurazione di induzione completa con il sistema delle due cariche, la carica totale indotta sarà quindi pari a  $-q = -18.0 \cdot 10^{-6}$  C.

## Esercizio 2

a) Dal teorema della circuitazione di Ampère:

$$\begin{array}{llll} \text{per } r < a: & H = 0 & B = 0 & M = 0 \\ \text{per } a < r < b: & H = ni = 6000 \text{ As/m} & B = \mu_0 ni = 7,54 \text{ mT} & M = 0 \\ \text{per } b < r < c: & H = ni & B = \mu_0 \mu_r ni = 1,51 \text{ T} & M = (\mu_r - 1) ni = 1194 \text{ kA/m} \end{array}$$

i campi sono diretti in direzione assiale con verso della vite destrorsa rispetto alla corrente esterna.

b) essendo il materiale ferromagnetico omogeneo e isotropo ( $\mu_r = \text{cost}$ ) non ci sono correnti amperiane di volume. Le correnti amperiane di superficie sono:

$$\begin{array}{ll} \text{per } r = b: & \vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n}_i = -(\mu_r - 1) ni \hat{\varphi} \quad \hat{n}_i = -\hat{r}, \text{ in direzione oraria, concorde con la corrente interna} \\ \text{per } r = c: & \vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n}_e = (\mu_r - 1) ni \hat{\varphi} \quad \hat{n}_e = \hat{r}, \text{ in direzione antioraria, concorde con la corrente esterna} \end{array}$$

La corrente amperiana sulla superficie esterna è  $I_e = (\mu_r - 1) ni l = 597 \text{ kA}$  concorde con la corrente nel solenoide esterno,

quella sulla superficie interna è  $I_i = (\mu_r - 1) ni l = 597 \text{ kA}$  concorde con la corrente nel solenoide interno.

c) Il flusso di  $B$  nel solenoide è:

$$\Phi(B) = \int_a^b \mu_0 ni \, 2\pi r dr + \int_b^c \mu_0 \mu_r ni \, 2\pi r dr = \pi \mu_0 ni [(b^2 - a^2) + \mu_r (c^2 - b^2)]$$

Il flusso concatenato con la corrente è:

$$\Phi_T = nl \Phi = \pi \mu_0 n^2 l [(b^2 - a^2) + \mu_r (c^2 - b^2)] i$$

e quindi il coefficiente di autoinduzione è:

$$L = \pi \mu_0 n^2 l [(b^2 - a^2) + \mu_r (c^2 - b^2)] = 1.9 \text{ H}$$

d) Per  $a < r < b$  per la legge di Faraday-Neumann si ha un campo elettrico  $E$  con linee di forza circolari centrate sull'asse del solenoide e direzione oraria:

$$\begin{aligned} 2\pi r E &= -\frac{d\Phi(B)_{r < b}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left[ \pi (r^2 - a^2) \mu_0 n i_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \right] = -\pi (r^2 - a^2) \mu_0 n i_0 \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \vec{E} &= -\frac{1}{2r} (r^2 - a^2) \mu_0 n i_0 \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \hat{\varphi} \\ \vec{I} = \vec{E} \times \vec{H} &= \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{1}{2r} (r^2 - a^2) \mu_0 n^2 i_0^2 \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \hat{r} \end{aligned}$$

con flusso entrante radialmente:

$$\Phi(I) = 2\pi r l \cdot I = \pi l (r^2 - a^2) \mu_0 n^2 i_0^2 \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Per  $b < r < c$  si ha un campo elettrico  $E$  con linee di forza circolari centrate sull'asse del solenoide e direzione oraria:

$$\begin{aligned} 2\pi r E &= -\frac{d\Phi(B)_{b < r < c}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left\{ \pi \mu_0 [(b^2 - a^2) + \mu_r (r^2 - b^2)] n i_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \right\} = \\ &= -\pi [(b^2 - a^2) + \mu_r (r^2 - b^2)] \mu_0 n i_0 \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \vec{E} &= -\frac{1}{2r} [(b^2 - a^2) + \mu_r (r^2 - b^2)] \mu_0 n i_0 \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \hat{\varphi} \\ \vec{I} = \vec{E} \times \vec{H} &= \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu} = -\frac{1}{2r} [(b^2 - a^2) + \mu_r (r^2 - b^2)] \mu_0 n^2 i_0^2 \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \hat{r} \end{aligned}$$

con flusso entrante radialmente:

$$\Phi(I) = 2\pi r l \cdot I = \pi l [(b^2 - a^2) + \mu_r (r^2 - b^2)] \mu_0 n^2 i_0^2 \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

*Si osservi che il flusso entrante a  $r = c$  comprende il flusso entrante a  $r = b$ .*

*L'energia magnetica all'aumentare della corrente entra dalla superficie laterale del cilindro: una parte rimane nel materiale ferromagnetico ( $b < r < c$ ), l'altra va nel volume di materiale paramagnetico con raggio  $a < r < b$  dove è presente un campo  $B \neq 0$ . Gli integrali sul tempo dei due flussi corrispondono all'energia magnetica contenuta a distanza radiale  $r$  per  $a < r < c$  e per  $a < r < b$ .*